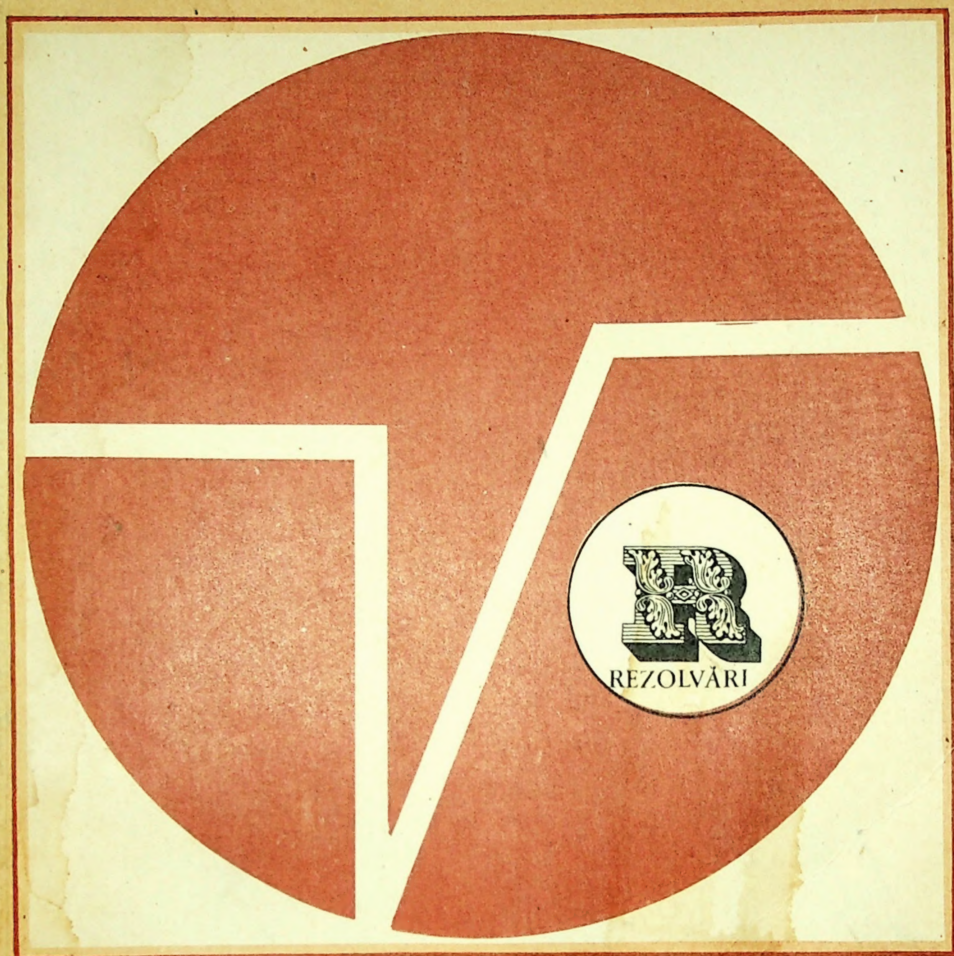



# Culegere de probleme MATEMATICĂ

BUCUREŞTI 1988

În sprijinul activității cercurilor științifice pionierești

# CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

Din subiectele date la concursurile școlare pe discipline de învățămînt, clasele IV—VIII

Volumul II — REZOLVĂRI ȘI REZULTATE

BUCUREȘTI, 1987

Culegere editată de
CONSILIUL NAŢIONAL AL ORGANIZAŢIEI PIONIERILOR

**COLECTIVUL DE REDACTARE A LUCRĂRII :**

*Clasa a IV-a şi a V-a — prof. CĂRBUNARU CONSTANTIN*
*Algebră : clasa a VI-a şi a VIII-a — prof. TRIFU MIRCEA*
*clasa a VII-a — prof. CHEŞCĂ ION*
*Geometrie : clasa a VI-a şi a VIII-a — prof. GAIU LAURENŢIU*
*clasa a VII-a — prof. SINGER MIHAELA*

**COORDONATORI :**

*Lector univ. dr. BRÂNZĂNESCU VASILE*
*Prof. MITRACHE IOAN*
*Prof. HĂRĂBOR CONSTANTIN*

**Desene : BARON LUMINIŢA**
**Coperta : BARON STAN**

# CLASA A IV-A

## REZOLVĂRILE ȘI REZULTATELE PROBLEMELOR PENTRU CLASA A IV-A

**IV.1.** 1000 dacă cifrele care se repetă sînt cît mai multe, 1001 dacă se repetă cît mai puține cifre.

**IV.2.** Cel mai mare număr natural de cinci cifre diferite este 98765 iar cel mai mare, mai mic decît el, este 98764.

**IV.3.** Dacă este mai mare decît 20000, înseamnă că este de forma $2abcd$. Deoarece trebuie să fie cel mai mic, $a = 0$, deci este de forma $20bcd$. Conform condiției c) avem $2 + b + c + d$ mai mare decît 19 adică $b + c + d$ mai mare decît 17, unde $a$, $b$, $c$ sînt diferite și cît mai mici. Dacă $b = 1$, trebuie să avem $c + d$ mai mare ca 16. Cum numărul trebuie să fie cel mai mic găsim că $c = 8$ și $d = 9$. Deci numărul este 20189.

**IV.4.** 324 ; 234 ; 243 ; 423 ; 432.

**IV.5.** 17.

**IV.6.** 0.

**IV.7.** a) 1 ; b) 24.

**IV.8.** $24 + 250 - 187 = 274 - 187 = 87.$

**IV.9.** $9 + (81 : 9 - 9) + 220 - 0 = 9 + (9 - 9) + 220 =$
$= 9 + 0 + 220 = 229.$

**IV.10.** $120 : 6 - 180 : 9 + 2 - 2 = 20 - 20 + 2 - 2 = 0.$

**IV.11.** $5\,100 : 17 + 205 - 184 : 23 = 300 + 205 - 8 = 505 - 8 = 497.$

**IV.12.** $25 \cdot (160 - 150) - 8 - (24 + 1) = 25 \cdot 10 - 8 - 25 =$
$= 250 - 8 - 25 = 242 - 25 = 217.$

**IV.13.** $550 : 10 + 20 \cdot (300 - 40 + 25) = 55 + 20 \cdot (260 + 25) =$
$= 55 + 20 \cdot 285 = 55 + 5700 = 5755.$

**IV.14.** $255 : 15 - (20 - 0) : 2 = 17 - 20 : 2 = 17 - 10 = 7.$

**IV.15.** $1600 + 800 : 200 - 50 : 25 = 1600 + 4 - 2 = 1604 - 2 = 1602.$

**IV.16.** $(180 - 30) : 5 + 216 - (120 - 26) = 150 : 5 + 216 - 94 =$
$= 30 + 216 - 94 = 246 - 94 = 152.$

**IV.17.** $(180 - 30) : 5 + 720 - (120 - 26) = 150 : 5 + 720 - 94 =$
$= 30 + 720 - 94 = 656.$

**IV.18.** $(8\,900 + 729\,800) : 178 - 109 = 738\,700 : 178 - 109 =$
$= 4\,150 - 109 = 4\,041.$

**IV.19.** $(229500 - 78000) : (20 + 105) = 151500 : 125 = 1212.$

**IV.20.** $400 + 120 - [34 + 4 \cdot 50] = 520 - [34 + 200] =$
$= 520 - 234 = 286.$

**IV.21.** $[60\,816 - 34\,160 + (43\,470 - 2\,146)] : 330 =$
$= [26\,656 + 41\,324] : 330 = 67\,980 : 330 = 206.$

**IV.22.** $[21\,600 - 1\,875 \cdot (100 - 91)] : 675 = [21\,600 - 1\,875 \cdot 9] : 675 =$
$= [21\,600 - 16\,875] : 675 = 4\,725 : 675 = 7.$

**IV.23.** $[(210 + 13\,841 - 6\,944 - 107) \cdot 3] : (561 + 156 + 283) =$
$[(14\,051 - 6\,944 - 107) \cdot 3] : 1\,000 = [(7\,107 - 107) \cdot 3] : 1\,000 =$
$= [7\,000 \cdot 3] : 1\,000 = 21\,000 : 1\,000 = 21.$

**IV.24.** $48\,000 - 3 + (300 + 2) \cdot 7 - 48\,125 = 47\,997 + 302 \cdot 7 - 48\,125 =$
$= 47\,997 + 2\,114 - 48\,125 = 50\,111 - 48\,125 = 1\,986.$

**IV.25.** $[190\,751 - 119 \cdot 309 - 512] : 147 = [190\,751 - 36\,771 -$
$- 512] : 147 = [153\,980 - 512] : 147 = 153\,468 : 147 = 1\,044.$

**IV.26.** $1 + 5 \cdot \{4 + 0\} = 1 + 5 \cdot 4 = 1 + 20 = 21.$

**IV.27.** $30 + 5 \cdot \{4 + 5 \cdot [40 + 8 \cdot (40 - 36)]\} =$
$= 30 + 5 \cdot \{4 + 5 \cdot [40 + 8 \cdot 4]\} =$
$= 30 + 5 \cdot \{4 + 5 \cdot [40 + 32]\} =$
$= 30 + 5 \cdot \{4 + 5 \cdot 72\} = 30 + 5 \cdot \{4 + 360\} =$
$= 30 + 5 \cdot 364 = 30 + 1\,820 = 1\,850.$

**IV.28.** $1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - (2 + 2) \cdot 65] \cdot 150\} =$
$= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - 4 \cdot 65] \cdot 150\} =$
$= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - 260] \cdot 150\} =$
$= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot 5 \cdot 150\} = 1\,500 + \{50 + 25 \cdot 150\} =$
$= 1\,500 + \{50 + 3\,750\} = 1\,500 + 3\,800 = 5\,300.$

**IV.29.** $2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\,004 - 4 \cdot (4 \cdot 2 - 8 : 2)]\} =$
$= 2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\,004 - 4 \cdot (8 - 4)]\} =$
$= 2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\,004 - 4 \cdot 4]\} =$
$= 2 \cdot \{92 + 8 \cdot [1\,004 - 16]\} = 2 \cdot \{92 + 8 \cdot 988\} =$
$= 2 \cdot \{92 + 7\,904\} = 2 \cdot 7\,996 = 15\,992.$

**IV.30.** $2\,500 + \{52 + 5 \cdot [265 - (2 + 2) \cdot 65] \cdot 150\} =$
$= 2\,500 + \{52 + 5 \cdot [265 - 4 \cdot 65] \cdot 150\} =$
$= 2\,500 + \{52 + 5 \cdot [265 - 260] \cdot 150\} =$
$= 2\,500 + \{52 + 5 \cdot 5 \cdot 150\} = 2\,500 + \{52 + 25 \cdot 150\} =$
$= 2\,500 + \{52 + 3\,750\} = 2\,500 + 3\,802 = 6\,302.$

**IV.31.** $30 + \{4 + 5 \cdot [8 \cdot (10 - 7)]\} : 2 = 30 + \{4 + 5 \cdot [8 \cdot 3]\} : 2 =$
$= 30 + \{4 + 5 \cdot 24\} : 2 = 30 + \{4 + 120\} : 2 =$
$= 30 + 124 : 2 = 30 + 62 = 92.$

**IV.32.** $2+6\cdot\{[(21-5)+12]:4+5\}\cdot 10-[(10+100)\cdot 5-60]=$
$=2+6\cdot\{[16+12]:4+5\}\cdot 10-[110\cdot 5-60]=$
$=2+6\cdot\{28:4+5\}\cdot 10-[550-60]=$
$=2+6\cdot\{7+5\}\cdot 10-490=2+6\cdot 12\cdot 10-490=$
$=2+720-490=722-490=232.$

**IV.33.** $[6\cdot 1\,000-(100-40)\cdot 5]-(100\cdot 7+1\,000:25\cdot 35)=$
$=[6\,000-60\cdot 5]-(700+40\cdot 35)=$
$=[6\,000-300]-(700+1\,400)=5\,700-2\,100=3\,600.$

**IV.34.** $\{[1\,848+9\,936:72]:(121+210)\}+4=$
$=\{[1\,848+138]:331\}+4=\{1\,986:331\}+4=$
$=6+4=10.$

**IV.35.** Avem :

$a=42-30-9=12-9=3$ ;
$b=8+12-16=20-16=4$ ;
$c=7-2=5.$

Deci :

a) $3\cdot 3-2\cdot 4+5=9-8+5=1+5=6$ ;
b) $4\cdot 3-3\cdot 4+2\cdot 5=12-12+10=0+10=10.$

**IV.36.** a) $5\cdot[(4:2)+8-2]=5\cdot[2+8-2]=5\cdot[10-2]=$
$=5\cdot 8=40$ ;

b) $[(5\cdot 4):2]+(8-2)=[20:2]+6=10+6=16$ ;

Altă situație : $[5\cdot(4:2)]+(8-2)=[5\cdot 2]+6=10+6=16$ ;

c) $5\cdot[(4:2)+8]-2=5\cdot[2+8]-2=5\cdot 10-2=$
$=50-2=48.$

**IV.37.** $5\cdot 4:(2+8)-2=20:10-2=2-2=0.$

**IV.38.** a) $6\cdot 9:(3+5-2)=6\cdot 9:6=54:6=9$ ;
b) nu este nevoie de paranteze ;
c) $6\cdot(9:3+5-2)=36.$

**IV.39.** a) $24:4+12-18=6+12-18=18-18=0.$

b) $3\cdot(8:4+6\cdot 2)-18=3\cdot(2+12)-18=3\cdot 14-18=$
$=42-18=24.$

**IV.40.** $a=[(20+1)\cdot 10-10]:40=[21\cdot 10-10]:40=200:40=5$ ;

$b=[5\cdot 5-20]\cdot 2-4=[25-20]\cdot 2-4=5\cdot 2-4=$
$=10-4=6.$

Deoarece $5<6$ rezultă că este adevărată afirmația $a<b$.

**IV.41.** $a=63+35+15+3=116$ ;
$b=63-35-15-3=10$ ;
$a+b=116+10=126$ ;
$a-b=116-10=106$ ;
$(a+b)-(a-b)=126-106=20$. Deci cu 20.

**IV.42.** $111 + 222 + 333 + \ldots + 888 + 999 =$
$= (111 + 999) + (222 + 888) + (333 + 777) +$
$+ (444 + 666) + 555 = 1110 \cdot 4 + 555 = 4995.$

**IV.43.** Aflăm cifra unităților: $6 - 7$ nu este număr natural, deci $16 - 7 = 9$. Cifra zecilor: $(8 - 1) - 5 = 2$. Observăm că la cifra miilor $1 + 4$ este diferit de 6. Înseamnă că la cifra sutelor avem trecere peste ordin, deci $9 + 1 = 10$.

Așadar: $1\,959 + 4\,127 = 6\,086$.

**IV.44.** Se observă că doar $6 \cdot 4 = 24$ și $6 \cdot 9 = 54$ au ultima cifră, cifra 4. Avem deci situația:

```
   45*6 ×
    324
 ------
  **144
  9*72
 13*08
 ------
 1*69664
```

Continuăm cu cifra zecilor de la primul număr. Acesta poate fi 3 sau 8. Se constată că numai 3 îndeplinește condițiile cerute. Deci: $4536 \times 324 = 1469664$. Verificați. A doua situație nu corespunde. Verificați.

**IV.45.** Avem $b + 7 = 6$ ceea ce nu ne poate da pe $b$ număr natural. Deci $b + 7 = 16$ adică $b = 9$. Mai departe trebuie să avem $5 + c = 8 - 1$ adică $c = 2$.

Observăm că la cifrele miilor $1 + 4$ este diferit de 6 deci la cifrele sutelor este nevoie de trecere peste ordin. Așadar: $a + 1 = d$ conduce numai la situația $a = 9$ și $d = 0$. Deci: $1\,959 + 4\,127 = 6\,086$. Observație: problema este identică cu problema IV.43.

**IV.46.** a) Cifra unităților de la al doilea număr poate fi 3 sau 8. În cazul cînd avem 3 primul produs parțial se verifică: $472 \times 3 = 1\,416$. Cifra zecilor de la același număr este 2 căci în cazul cînd o înmulțim cu 4 de la ordinul sutelor trebuie să avem fără trecere peste ordin, deci $472 \times 23 = 10\,856$. În cazul cînd avem 8, nu se verifică primul produs parțial, $472 \times 8$ este diferit de $1\,416$.

b) Se observă că 362 are trei cifre ca și primul produs parțial. Cifra unităților de la al doilea număr nu poate fi decît 1, 2 sau 3. Din acestea, la înmulțirea cu 2 dă patru, numai 2; deci primul produs parțial este 724. Cifra zecilor la înmulțirea cu 2 trebuie să dea la al doilea produs parțial 8. Poate fi 4 sau 9. Verifică numai 9. Rezultă: $362 \times 92 = 33\,304$.

**IV.47.** 9 944.

**IV.48.** $9 : 9 + 9 = 1 + 9 = 10$.

**IV.49.** Împărțirea fără rest la 7 înseamnă că restul este zero; numărul căutat este scris sub formă de produs unde unul din factori este 7.

Avem $7 \times 4 = 28$ și $7 \times 13 = 91$. Rezultă că numerele cerute sînt : 28 și 91.

**IV.50.** Deoarece Ionel are 660 lei înseamnă că Mihai are 660 lei : : 4 = 165 lei, Mircea are 660 lei : 2 = 330 lei, iar Horia 330 lei $\times$ 3 = 990 lei. Suma totală este 2 145 lei.

**IV.51.** a) 22 ; 16 ; 24 ;

b) 6 200 lei : (22 + 16 + 24) = 100 lei ;

c) 2 200 ; 1 600 ; 2 400.

**IV.52.** 3 826 lei.

**IV.53.** Consumul vacilor : 50 l $\times$ 250 = 12 500 l.

Consumul cailor : (50 l + 10 l) $\times$ 48 = 2 880 l.

Consumul oilor : 45 028 l — (12 500 l + 2 880 l) = 29 648 l.

Numărul de oi este 29 648 : 8 = 3 706.

**IV.54.** Diferența dintre populațiile celor două orașe este de 65 000 — — 40 000 adică 25 000 de locuitori. Diferența dintre creșteri este de 6 500 — 4 000 = 2 500 (locuitori). Vor fi egale cele două populații după 25 000 : 2 500 = 10 (ani).

**IV.55.** Toate catedrele costă : 1 080 lei $\times$ 34 = 36 720 lei iar toate băncile costă : 265 860 lei — 36 720 lei = 229 140 lei.

O bancă costă : 229 140 lei : 603 = 380 lei.

Valoarea mobilierului, în lei, pentru liceu este : 1 080 $\times$ 15 + + 380 $\times$ 236 = 105 880.

Restul, este valoarea mobilierului pentru școală, adică 159 980 lei.

**IV.56.** Diferența de 1 860 l — 1 680 l = 180 l provine de la cele 3 butoaie mai mult transportate prima dată. Deci un butoi are 180 l : 3 = 60 l. Prima dată s-au primit 1 860 : 60 = 31 butoaie iar a doua oară 1 680 : 60 = 28 butoaie, adică, în total 59 butoaie.

**IV.57.** Mai întîi vom găsi numerele naturale care se împart exact la 3 și la 4, mai mici decît 40. Acestea sînt 0, 12, 24 și 36. Numerele cerute sînt 2, 14, 26 și 38.

**IV.58.** Deoarece împărțitorul este numărul 4 restul poate fi unul din numerele : 0 ; 1 ; 2 ; 3 deci avem $4 \times 102$ ; $4 \times 102 + 1$ ; $4 \times 102 + 2$ ; $4 \times 102 + 3$ adică 408 ; 409 ; 410 ; 411.

**IV.59.** Numărul natural cel mai mare trebuie să se împartă exact la trei, pentru a se obține numărul natural, cel mic. Numerele mai mari ca 14 și mai mici ca 20 care se împart exact la 3 sînt 15 și 18. Deci avem : 5 și 15 și altă situație 6 și 18.

**IV.60.** Un pahar mare costă cu 95 lei — 73 lei = 22 lei mai mult. Deci s-au cumpărat 374 : 22 adică 17 pahare mari și tot atîtea pahare mici. Toate paharele au costat : $95 \times 17 + 73 \times 17$ adică 2 856 lei.

**IV.61.** Se observă că numărul de elevi, trebuie să fie un număr care prin împărțirea la trei să se obțină restul zero. Deci în clasă nu pot fi

32 elevi căci restul la împărţirea lui 32 la 3 este 2 şi nu este numărul zero. În clasă pot fi 36 de elevi. Băieţi sînt în număr de $36 : 3 = 12$ iar fete sînt $12 \times 2 = 24$.

**IV.62.** Se constată că trei părţi egale cu numărul cel mic reprezintă $35 - 2 = 33$.




*Fig. IV.62.*

Rezultă că numărul cel mic este $33 : 3 = 11$, iar cel mare $11 \times 2 + 2 = 22 + 2 = 24$. Acesta se mai poate calcula şi astfel : $35 - 11 = 24$.

**IV.63.** Cifra miilor este 9, cifra unităţilor este 8, iar cifra sutelor este 7 şi cifra zecilor este 5. Deci numărul este 9 758.

**IV.64.** Cantitatea de lapte adusă a treia oară este 850 l — 70 dal = = 850 l — 700 l = 150 l. Întreaga cantitate adusă la magazin este de 700 l + 850 l + 150 l = 1 700 l. Vînzarea poate fi figurată astfel :




*Fig. IV.64.*

Constatăm că întreaga cantitate de 1 700 l se poate exprima prin cinci cantităţi egale cu cantitatea vîndută a doua zi. Deci cantitatea vîndută a doua zi este de 1 700 l : 5 = 340 l, iar cea vîndută în prima zi, de patru ori mai mare, este de 340 l × 4 = 1 360 l. Verificare : 1 360 l + 340 l = 1 700 l.

Observaţie : Cantitatea vîndută în prima zi se mai poate afla şi astfel : 1 700 l — 340 l = 1 360 l.

**IV.65.** Metoda I.

Se observă că diferenţa dintre vîrstele celor doi fraţi, în trecut, era de 11 — 6, adică de cinci ani. Această diferenţă se păstrează mereu. Deci avem problema : doi fraţi au împreună 41 de ani, unul este mai mare decît celălalt cu cinci ani ; cîţi ani are fiecare ?

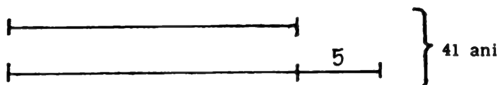



*Fig. IV.65.a.*

Figura sugerează următoarele calcule :

$41 - 5 = 36$ ; $36 : 2 = 18$ ; $18 + 5 = 23$. Deci unul are 18 ani, iar celălalt 23 ani.

Metoda a II-a.

Figurăm ca în desenul următor, unde segmentul „îngroşat" reprezintă timpul care a trecut din trecut pînă în prezent.

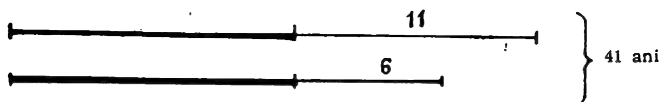



*Fig. IV.65.b.*

Vom avea $41 - (11 + 6) = 41 - 17 = 24$ deci $24 : 2 = 12$. Unul are $12 + 11$ adică 23 ani, iar celălalt $12 + 6$ adică 18 ani.

**IV.66.** În cazul în care cartea, în locul unde a fost deschisă nu are nici o foaie ruptă, cele două numere ce arată ordinea paginilor sînt două numere naturale consecutive. Diferența dintre două numere naturale consecutive este numărul 1. Ne ajutăm de desenul alăturat și afirmăm că primul număr este de două ori mai mic decît numărul $149 - 1 = 148$, adică $148 : 2 = 74$. Așadar numerele de pe cele două pagini pe care le privim sînt 74 și 75.

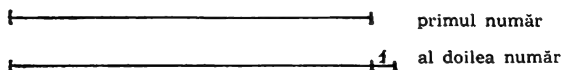



*Fig. IV.66.a.*

Verificare : $74 + 75 = 149$.

În cazul în care cartea, în locul în care este deschisă, are ruptă o foaie, cele două numere ce arată ordinea paginilor nu mai sînt numere consecutive. Ele sînt numere care au diferența numărul trei. Exemplu : pagina din stînga are numărul 16, iar cea din dreapta, numărul 19, foaia ruptă avînd numerele 17 și 18. În acest caz situația este reprezentată în figură astfel :

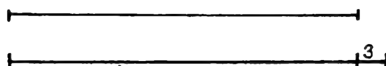



*Fig. IV.66.b.*

Deci $149 - 3 = 146$ ; $146 : 2 = 73$. Primul număr este 73, iar al doilea 76. Această situație nu corespunde realității. De regulă, numărul scris pe pagina din stînga, cel mic, este număr par, iar cel scris pe pagina din dreapta este număr impar.

Cercetați și alte situații !

**IV.67.** Figurăm în desen situația la început :




*Fig. IV.67.a.*

Figurăm în desen situaţia a doua :

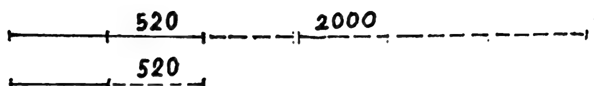



*Fig. IV.67.b.*

Se constată că suma 520 + 2 000 adică 2 520 reprezintă 5 cantităţi egale cu marfa adusă la început în al doilea magazin. Deci în al doilea magazin s-au adus 2 520 kg : 5 = 504 kg iar în primul magazin, 504 kg × 6 = 3 024 kg.

**IV.68.** a) Folosim metoda grafică luînd ca unitate realizarea primei echipe.

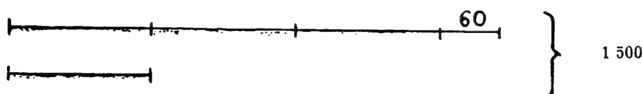



*Fig. IV.68.*

1 500 — 60 = 1 440 ; 1 440 : 4 = 360 de piese a realizat a doua echipă iar prima 1 500 — 360 = 1 140.

b) Prima echipă are 1 140 : 30 = 38 de muncitori, iar a doua 360 : 30 = 12.

**IV.69.** Ultima parte a enunţului ne permite să realizăm următorul desen :




*Fig. IV.69.*

Aceasta sugerează calculele : 1 000 : 4 = 250 ; 250 × 3 = 750. Avem deci : al cincilea număr este 250, al patrulea număr 750, al treilea număr este 750 — 40 = 710, al doilea număr este 710 + 25 = 735, iar primul număr este 735 × 2 = 1 470.

**IV.70.** $e = 125$ ; $d = 375$ ; $c = 300$ ; $b = 325$ ; $a = 1\ 300$.

**IV.71.** Putem exprima totul numai cu bucăţi, fiecare de lungime egală cu cea mică.




*Fig. IV.71.*

Două bucăți mari înseamnă cît patru bucăți mici. Avem, deci, 7 bucăți mici care reprezintă 185 cm — 17 cm = 168 cm. Bucata mică are 24 cm iar cea mare 48 cm.

**IV.72.** Avem : 240 — 20 = 220 care reprezintă cinci părți egale cu numărul cel mic. Deci numărul cel mic este 220 : 5 = 44, iar cel mare este 240 — 44 = 196. Verificați prin împărțire. Problema este posibilă căci restul este mai mic decît împărțitorul.

**IV.73.**




*Fig. IV.73.*

Numărul 143 este obținut adunînd patru numere : cel mare (deîmpărțitul). cu cel mic (împărțitorul), cu 3 (care este cîtul) și cu restul (care este 10). Deci, de patru ori numărul cel mic reprezintă 143 — — (10 + 3) = 130. Rezultă că numărul mic este 120 : 4 = 30 iar cel mare este 100.

Faceți proba !

**IV.74.**

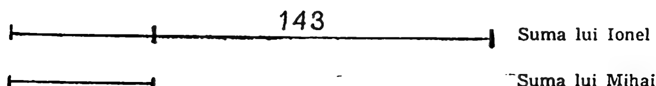



*Fig. IV.74.a.*

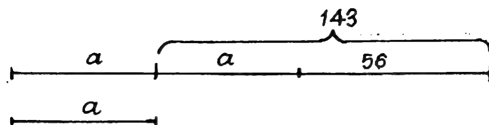



*Fig. IV.74.b.*

Se poate observa că suma lui Ionel este de două ori mai mare ca suma lui Mihai și încă 56 lei. Să notăm suma de bani a lui Mihai cu *a* (fig. b). Desenul ne poate conduce la faptul că : *a* = 143 lei — 56 lei = = 87 lei. Deci, Ionel are 87 lei + 143 lei = 230 lei.

**IV.75.** Notăm primul număr cu *a*. Prima condiție se figurează în desen astfel :

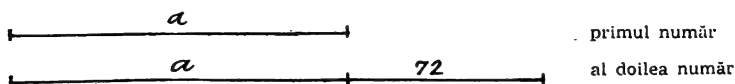



*Fig. IV.75.a.*

A doua situaţie poate fi figurată astfel :

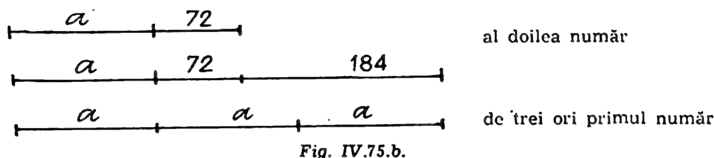



*Fig. IV.75.b.*

Se constată că $2 \times a = 72 + 184$. Se găseşte că $a = 128$ iar al doilea număr este $128 + 72 = 200$.

**IV.76.** Sumele primite pot fi ilustrate în desenul alăturat.

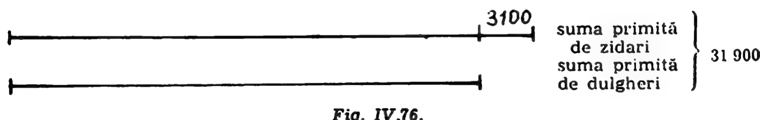



*Fig. IV.76.*

Observăm că suma primită de dulgheri este : (31 900 — 3 100) : 2 adică 14 400 lei. Suma primită de zidari este : $14\,400 + 3\,100$ adică 17 500 lei. Deci au fost $17\,500 : 500 = 35$ (zidari) şi $14\,400 : 600 = 24$ (dulgheri).

**IV.77.**

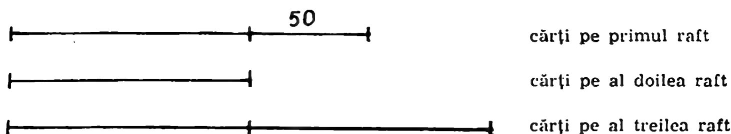



*Fig. IV.77.*

Folosind figura, constatăm că dacă din numărul de 458 scădem numărul 50 obţinem 408 ce reprezintă de patru ori mai mult decît numărul de cărţi de pe raftul al doilea. Deci pe raftul al doilea se găsesc de patru ori mai puţine cărţi decît numărul 408, adică $408 : 4 = 102$. Aşadar : pe primul raft sînt $102 + 50 = 152$ cărţi, pe al doilea raft sînt 102 cărţi, iar pe al treilea sînt $102 \times 2 = 204$ cărţi.

**IV.78.** Realizăm un desen în concordanţă cu datele problemei unde am notat cu *d* diferenţa :

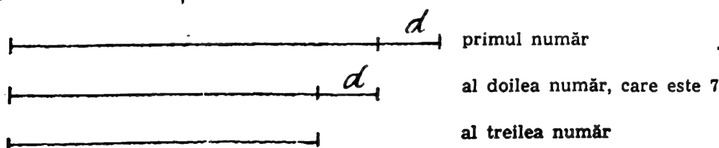



*Fig. IV.78.a.*

Ne putem imagina situaţia şi astfel :

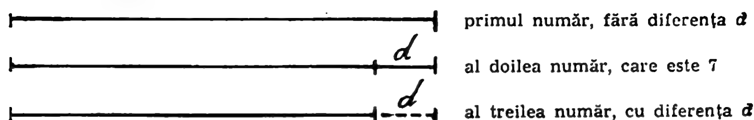



*Fig. IV.78.b.*

Această situaţie corespunde la faptul că suma celor trei numere este 7 × 3 adică 21.

**IV.79.** Deoarece a treia ladă este cu 4 kg mai mare ca a doua înseamnă că 5 cantităţi egale cu marfa din prima ladă reprezintă (614 kg — 4 kg) : 5 adică 610 kg : 5 = 122 kg, a doua ladă are 122 kg × 2 = 244 kg iar a treia ladă 244 kg + 4 kg = 248 kg. Verificaţi !

**IV.80.** 243 ; 486 ; 500.

**IV.81.** Scăzînd din al treilea număr 17, rezultatul este egal cu numărul al doilea, care este de trei ori mai mare ca primul.

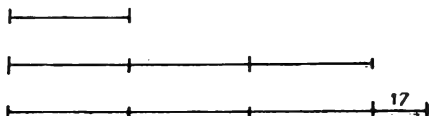



*Fig. IV.81.*

Deci de 7 ori primul număr este 717 — 17 = 700. Avem numerele : 700 : 7 = 100 ; 100 × 3 = 300 ; 300 + 17 = 317.

**IV.82.**

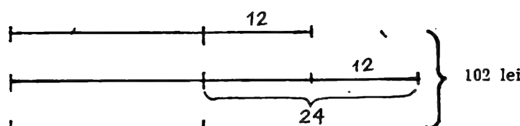



*Fig. IV.82.*

Se observă că de trei ori suma cheltuită de al treilea este 102 — (24 + 12) adică 66 lei. Deci al treilea a cheltuit 66 lei : 3 = 22 lei, al doilea a cheltuit 22 lei + 24 lei = 46 lei, iar primul 46 lei — 12 lei = = 34 lei.

**IV.83.**

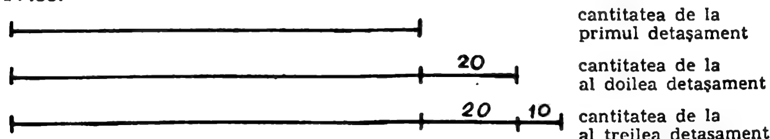



*Fig. IV.83.*

Se observă că dacă scădem din toată cantitatea de 320 kg ce este în plus la fiecare, față de primul detașament, adică $20 + (20 + 10) = 20 + 30 = 50$, obținem 320 kg — 50 kg = 270 kg care reprezintă de 3 ori cantitatea adunată de primul. Deci cantitatea adunată de primul este 270 kg : 3 = 90 kg, Așadar, cantitățile sînt respectiv : 90 kg ; 110 kg ; 120 kg.

b) Fiecare detașament a contribuit respectiv cu : $90 \times 15 = 1\,350$ (lei) ; $110 \times 15 = 1\,650$ (lei) și $120 \times 15 = 1\,800$ (lei). Verificare : 1 350 lei + 1 650 lei + 1 800 lei = 4 800 lei adică cît $320 \times 15 = 4\,800$ lei.

**IV.84.** Informațiile despre primele trei numere pot fi figurate în desen astfel :

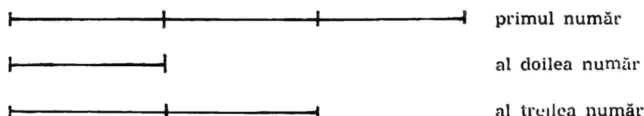



*Fig. IV.84.*

Deoarece al patrulea număr este 30 obținem că suma primelor trei este 138 — 30 = 108. Se observă că numărul al doilea este de 6 ori mai mic decît 108. Deci el este 108 : 6 = 18. Rezultă că numărul al treilea este $18 \times 2 = 36$ iar primul $18 + 36 = 54$. Verificare : $54 + 18 + 36 + 30 = 138$.

**IV.85.**

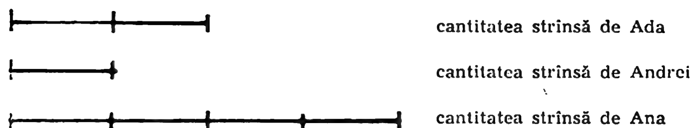



*Fig. IV.85.*

Andrei a strîns 28 kg : 7 = 4 kg ; Ada a strîns $4 \text{ kg} \cdot 2 = 8$ kg ; iar Ana a strîns $8 \text{ kg} \cdot 2 = 16$ kg.

**IV.86.** Ne imaginăm datele problemei în următorul desen :

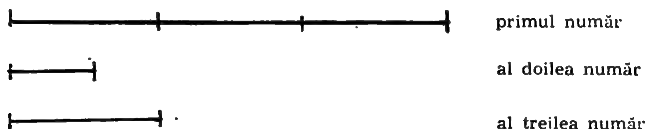



*Fig. IV.86.a.*

Putem să exprimăm atît primul număr cît și al treilea număr, în desen, cu ajutorul celui de-al doilea astfel :

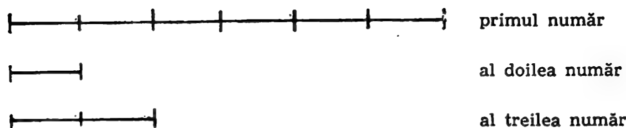



*Fig. IV.86.b.*

În acest mod suma numerelor, care este 45, înseamnă că este de 9 ori mai mare decît numărul al doilea. Avem deci : $45 : 9 = 5$ adică al doilea număr, $5 \cdot 2 = 10$ adică al treilea număr şi $10 \cdot 3 = 30$ primul număr. Verificare : $30 + 5 + 10 = 45$.

**IV.87.** Notăm cu $a$, $b$, $c$ cele trei numere. Figurăm în desen, faptul că suma lor este 1 240 şi că suma primelor două, $a + b = 938$ :

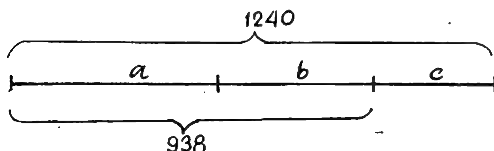



*Fig. IV.87.a.*

Observăm că al treilea număr se obţine prin scăderea : $c = 1\,240 - 938 = 302$. Figurăm în desen, faptul că suma celor trei numere este 1 240 şi că suma ultimelor două este 720.

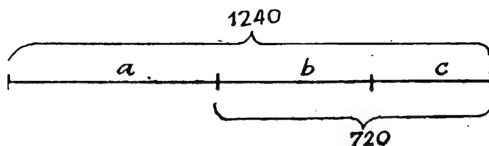



*Fig. IV.87.b.*

Primul număr se obţine prin scăderea $a = 1\,240 - 720 = 520$. Din suma primelor două scădem numărul $a$ şi obţinem numărul $b = 938 - 520 = 418$. Deci trei operaţii aritmetice.

**IV.88.** 10 lei ; 100 lei ; 90 lei.

**IV.89.** 2 000 kg ; 3 000 kg ; 4 000 kg.

**IV.90.** 62 kg ; 71 kg ; 74 kg.

**IV.91.** Se observă că al treilea număr este cu $250 - 180 = 70$ mai mare decît al doilea număr. Avem că $2\,450 - (250 + 70) = 2\,130$ reprezintă de

trei ori mai mult decît numărul al doilea. Deci acest număr este $2\,130 : 3 = 710$. Rezultă că primul număr este $710 + 250 = 960$, iar al treilea 780.

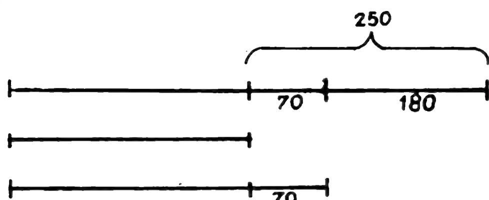


*Fig. IV.91.*

**IV.92.**

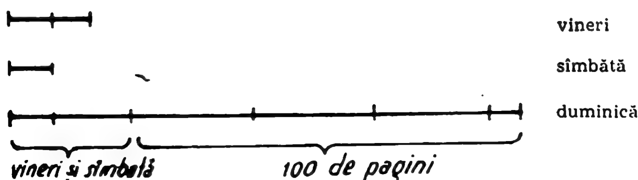


*Fig. IV.92.*

Observați că 100 de pagini reprezintă de trei ori mai mult decît a citit vineri și sîmbătă și încă 10 pagini. Înseamnă că de trei ori cît a citit vineri și sîmbătă reprezintă $100 - 10$ adică 90 de pagini. Cum vineri a citit de două ori mai mult ca sîmbătă, deci vineri și sîmbătă a citit $90 : 3 = 30$ (pagini), înseamnă că vineri a citit $30 : 3 = 10$ (pagini) iar sîmbătă a citit $10 \cdot 2 = 20$ de pagini. Deci a citit respectiv 20, 10, 130 pagini.

**IV.93.** Numărul de animale este $100 - 4 = 96$.

Se observă că viței și mînji la un loc, sînt de patru ori mai mult decît mînji. Deci miei sînt de 8 ori mai mulți decît mînji. Putem exprima numărul de animale, adică 96, prin 12 părți egale cu numărul mînjilor. Rezultă că mînji sînt : $92 : 12 = 8$, viței sînt $8 \cdot 3 = 24$ iar miei $(8 + 24) \cdot 2 = 32 \cdot 2 = 64$. Verificați !

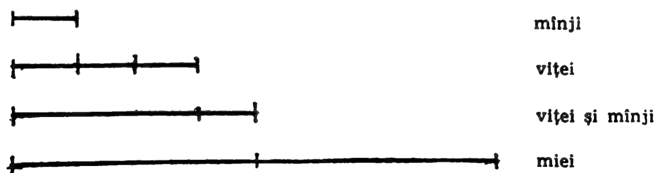


*Fig. IV.93.*

**IV.94.** Desenul ne sugerează următoarele calcule :

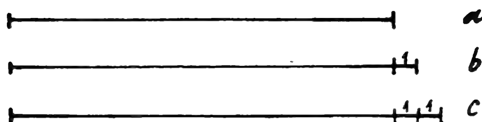



*Fig. IV.94.*

1 209 — 3 = 1 206 ; 1 206 : 3 = 402.
Deci numerele sînt : 402 ; 403 ; 404.

**IV.95.** a)

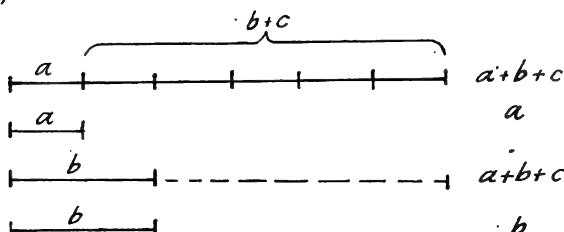



*Fig. IV.95.a.*

Se constată că $b$ este de două ori mai mare decît $a$. Deci avem următorul desen :

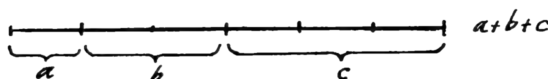



*Fig. IV.95.b.*

Rezultă că suma $a + b + c$ este mai mare de două ori decît $c$.
b) $a = b : 2 = 54$ ; $c = (a + b + c) : 2 = (6 \cdot a) : 2 = 3 \cdot a = 162$.

**IV.96.** Metoda I : figurăm în desen situaţia cu privire la primele două persoane, unde am notat cu $a$ suma încasată de prima persoană :

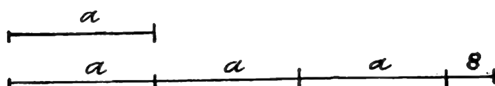



*Fig. IV.96.a.*

Conform enunţului a treia persoană primeşte de 4 ori mai mult decît $4 \cdot a + 8$. Aceasta înseamnă de 16 ori suma $a$ adunată cu $4 \cdot 8$. Înseamnă că suma de 520 lei este formată din 20 părţi egale cu $a$, adunate cu 40 lei. Avem deci că suma $a = (520 \text{ lei} - 40 \text{ lei}) : 20 = 24$ lei. A doua persoană a primit $(24 \text{ lei} \cdot 3) + 8$ lei $= 80$ lei, iar a treia, 416 lei.

Metoda a II-a : urmărind desenul, putem raţiona astfel :




*Fig. IV.96.b.*

520 : 5 = 104 este suma încasată de prima persoană şi a doua la un loc. Deci 520 — 104 = 416 a încasat persoana a treia. Prima persoană a primit (104 — 8) : 4 = 24 (lei), iar a doua 104 — 24 = 80 (lei).

**IV.97.** Reprezentăm grafic condiţia că fiecare cifră este cu 2 mai mare decît cea anterioară. Deoarece suma cifrelor este 20, rezultă că de patru ori cifra mai mică este reprezentată prin numărul 20 — 2·6 = 8, adică 8 : 4 = 2. Aşadar cifrele sînt 2, 2 + 2 = 4, 4 + 2 = 6, 6 + 2 = 8 şi deci numărul este 2 468 sau 8 642.

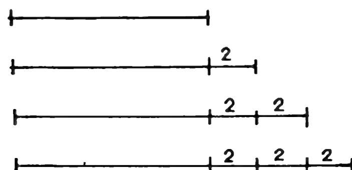



*Fig. IV.97.*

**IV.98.** Se observă că al treilea siloz este mai mare decît al patrulea cu (280 — 150) tone, adică cu 130 t. Urmărind desenul constatăm că de 5 ori cît este în al patrulea siloz reprezintă 10 345 — (3·280) — 130 adică 9 375 tone. Rezultă că în al patrulea siloz se află 9 375 t : 5 = 1 875 t ; în al treilea siloz se află 1 875 t + 130 t = 2 005 t ; în al doilea avem 1 875 t + 280 t = 2 155 t ; iar în primul 2 155 t·2 = 4 310 t.

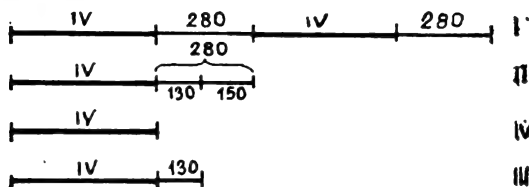



*Fig. IV.98.*

**IV.99.** Se observă şi din desen că *D* este mai mare decît *B* cu 40 — 25 adică cu 15. Dacă lui *B* îi adunăm 15, iar lui *C* îi adunăm 40 suma *B* + *C* + *D* + *E* se măreşte cu 15 + 40 = 65. Obţinem că 815 + 65 = 870, adică trei numere egale cu *D* la care se adună numărul *E*. Folosim şi condiţia d) şi obţinem că 870 reprezintă 10 numere egale cu *E*.

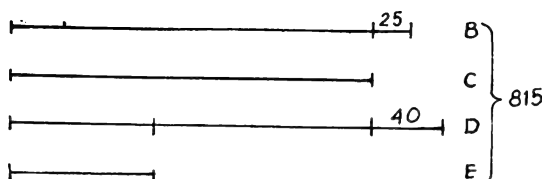


*Fig. IV.99.a.*

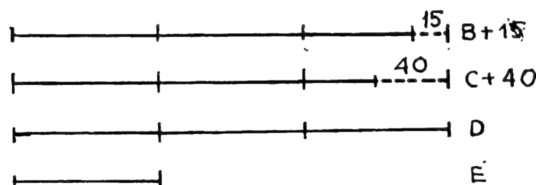


*Fig. IV.99.b.*

Rezultă că : $E = 870 : 10 = 87$ ; $D = 87 \cdot 3 = 261$ ; $C = D - 40 = 261 - 40 = 221$ ; $B = C + 25 = 246$ ; $A = B \cdot 2 = 492$.
Verificare : $B + C + D + E = 246 + 221 + 261 + 87 = 815$.

**IV.100.** a) Scriem datele problemei astfel :
2 caiete matematică, 2 caiete desen, 12 lei ;
2 caiete matematică, 3 caiete desen, 13 lei
Se observă că :
0 caiete matematică, 1 caiet desen, 1 leu
0 caiete matematică, 2 caiete desen, 2 lei
Rezultă că :
2 caiete matematică, 0 caiete desen, 10 lei
1 caiet matematică, 0 caiete desen 5 lei
b) 6 caiete de desen sau 1 caiet matematică și 1 caiet de desen.

**IV.101.** Așezăm datele astfel :
17 saci făină, 26 saci cartofi, 2 764 kg
17 saci făină, 35 saci cartofi, 3 250 kg
0 saci făină, 9 saci cartofi, 486 kg
0 saci făină, 1 sac cartofi, 486 kg : 9 = 54 kg
0 saci făină, 26 saci cartofi, 54 kg · 26 = 1 404 kg
17 saci făină, 0 saci cartofi, 2 764 kg — 1 404 kg = 1 360 kg
1 sac făină, 0 saci cartofi, 1 360 kg : 17 = 80 kg
Deci un sac cu cartofi cîntărește 54 kg, iar unul cu făină, 80 kg.

**IV.102.** a) 50 kg ; b) 30 kg.

**IV.103.** 80 kg ; 50 kg.

**IV.104.** 12 băieți, 6 fete, 150 kg.
24 băieți, 13 fete, 305 kg.

Dacă dublăm tot ce avem în prima situație obținem :
24 băieți, 12 fete, 300 kg.
24 băieți, 13 fete, 305 kg.
Rezultă că o fată culege 5 kg iar un băiet 10 kg.

**IV.105.** Datele problemei sînt :
4 m pînză, 15 m stambă, 530 lei
3 m pînză, 10 m stambă, 360 lei

Dacă în prima situație considerăm de două ori mai mult iar în a doua de trei ori mai mult obținem că :
8 m pînză, 30 m stambă, 1 060 lei
9 m pînză, 30 m stambă, 1 080 lei

Această situație ne conduce la afirmația :
1 m pînză, 0 m stambă, 20 lei

Acum putem spune că 1 m stambă costă $(360 - 3 \cdot 20) : 10$ adică 30 lei.

**IV.106.** Dacă o masă costă cît trei scaune iar un dulap cît trei mese, înseamnă că un dulap costă cît 9 scaune. Așadar în loc de o masă, un scaun și un dulap avem 13 scaune care costă 2 808 lei.

Deci un scaun costă 216 lei, o masă 648 lei, iar un dulap 1 944 lei. Tot mobilierul costă : $9 \cdot 1\,944$ lei $+ 16 \cdot 648$ lei $+ 64 \cdot 216$ lei $= 41\,688$ lei.

**IV.107.** Desenul din figură ne conduce la următoarele calcule: 70 kg : 5 = = 14 kg (struguri) ; 14 kg $\times$ 4 = 56 kg (mere). Deoarece 1 kg struguri costă cît 2 kg mere, am putea spune că de aceeași sumă s-au cumpărat numai mere în cantitatea de : (14 kg $\times$ 2) + 56 kg = 84 kg (mere). Deci prețul merelor este 420 lei : 84 = 5 lei iar al strugurilor 10 lei.




*Fig. IV.107.*

**IV.108.** $x \times 2 - 40 = 12 \times 23$ ; $x \times 2 - 40 = 276$.
$x \times 2 = 276 + 40$ ; $x \times 2 = 316$ ; $x = 316 : 2$ ; $x = 158$.

**IV.109.** $[(x - 104 + 2) \times 5 + 3] = 1\,986 : 2$
$(x - 104 + 2) \times 5 + 3 = 993$
$(x - 104 + 2) \times 5 = 993 - 3$
$(x - 104 + 2) \times 5 = 990$
$x - 104 + 2 = 990 : 5$ ; $x - 104 + 2 = 198$
$x - 104 = 198 - 2$ ; $x - 104 = 196$ ; $x = 196 + 104$
$x = 300$.

**IV.110.** $(288 - 288) \times (1\,985 \times 1\,986 + 1\,987 \times 1\,988 - 1\,989 \times 1\,990) + x = 2$ ; $0 \times (1\,985 \times 1\,986 + 1\,987 \times 1\,988 - 1\,989 \times 1\,990) + x = 2$ ; $0 + x = 2$ ; $x = 2$.

**IV.111.** $x = 2$.

**IV.112.** $[(812 - 207) : 5 + 720 - (767 - 26)] \times x = 1\,000$
$[605 : 5 + 720 - 741] \times x = 1\,000$
$[121 + 720 - 741] \times x = 1\,000$ ; $100 \times x = 1\,000$ ; $x = 10$.

**IV.113.** $5 \times x - 40 - 200 = 40$ ; $5 \times x - 40 = 40 + 200$ ;
$5 \times x - 40 = 240$ ; $5 \times x = 240 + 40$ ; $5 \times x = 280$ ;
$x = 280 : 5$ ; $x = 56$.

**IV.114.** a) $b = 0$ și $a \neq 0$ ; $b \neq 0$ și $a = 0$ ; $b = a = 0$

b) deoarece avem $0 \times c = 0$, înseamnă că c este orice număr natural. Deci exercițiul devine $a \times b = 6$. Numerele $a$ și $b$ fiind naturale, avem : $a = 1$ și $b = 6$ ; $a = 2$ și $b = 3$ ; $a = 3$ și $b = 2$ ; $a = 6$ și $b = 1$

c) $c = 0$ și $a - b$ orice număr natural ; $a - b = 0$, adică $a = b$ și c orice număr natural.

**IV.115.** $x \times [14 \times (400 - 300) = 5\,600$ ; $x \times [14 \times 100] = 5\,600$ ;
$x \times 1\,400 = 5\,600$ ; $x = 5\,600 : 1\,400$ ; $x = 4$.

**IV.116.** $[(x - 1) : 100 + 90] : 10 = 10$ ; $(x - 1) : 100 + 90 = 100$ ;
$(x - 1) : 100 = 10$ ; $x - 1 = 1\,000$ ; $x = 1\,001$.

**IV.117.** $[(13 \times x - 30) : 3 - 10] = 1\,225 : 7$ ;
$(13 \times x - 30) : 3 - 10 = 175$ ; $(13 \times x - 30) : 3 = 185$ ;
$13 \times x - 30 = 555$ ; $13 \times x = 585$ ; $x = 45$.

**IV.118.** $123 \times x - 1\,278 = 36 \times 149$ ; $123 \times x - 1\,278 = 5\,364$ ;
$123 \times x = 6\,642$ ; $x = 54$.

**IV.119.** $\{[4 \times 5 - 2 + 3] : 7 + 9\} : x = 4$ ;
$\{[20 - 2 + 3] : 7 + 9\} : x = 4$ ; $\{21 : 7 + 9\} : x = 4$ ;
$12 : x = 4$ ; $x = 3$.

**IV.120.** $(x + 270 : 3) \times 5 + 100 = 600$ ; $(x + 270 : 3) \times 5 = 500$ ;
$x + 90 = 500 : 5$ ; $x + 90 = 100$ ; $x = 10$.

**IV.121.** $[(286 + x) - 43] : 3 = 306$ ; $[(286 + x) - 43] = 918$ ;
$286 + x = 961$ ; $x = 675$.

**IV.122.** $10 \times \{x - 10 \times [362 + 10 \times (24 + 6)]\} = 100$ ;
$10 \times \{x - 10 \times [362 + 10 \times 30]\} = 100$ ;
$10 \times \{x - 10 \times [362 + 300]\} = 100$ ;
$10 \times \{x - 10 \times 662\} = 100$ ;
$10 \times \{x - 6\,620\} = 100$ ; $x - 6\,620 = 10$ ; $x = 6\,630$.

**IV.123.** $204 : 102 + x \times 900 = 402 + 1\,400$ ;
$2 + x \times 900 = 1\,802$ ; $x \times 900 = 1\,800$ ; $x = 1\,800 : 900$ ;
$x = 2$.

**IV.124.** Cantitățile vîndute sînt respectiv : 491 kg, 639 kg, 834 kg. Sumele încasate sînt respectiv : 2 946 lei, 3 834 lei, 5 004 lei.

**IV.125.** Desenul din figură inspiră următoarele calcule :

$1\,100 : 11 = 100$, adică al doilea număr. Al patrulea este $100 \times 4 = 400$. Primul este $100 \times 2 = 200$. Al treilea este $200 \times 2 = 400$. Verificați !

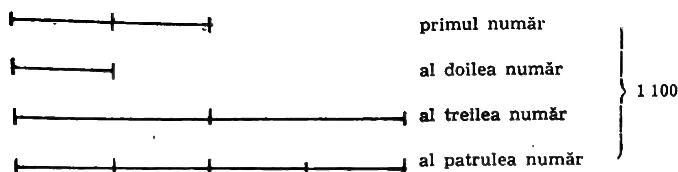



*Fig. IV.126.*

**IV.126.** În afară de pionierul comandant sînt 35 elevi. În fața sa avem o parte, iar în spatele său patru părți egale cu cea din față. Deci cei 35 elevi reprezintă 5 părți egale cu numărul elevilor din față. În fața pionierului comandant sînt 35 : 5 = 7 elevi, deci el este pe locul opt în coloană.




*Fig. IV.125.*

**IV.127.** Elevul a avut inițial 50 lei $\times$ 4 = 200 lei. I-au mai rămas după cumpărarea stiloului 200 lei — 50 lei = 150 lei. Cărțile au costat 150 lei : 5 = 30 lei. Rezultă că a mai rămas cu 150 lei — 30 lei adică cu 120 lei.

Observație : Deoarece cele două cărți au costat o cincime din rest, înseamnă că i-au mai rămas $\frac{4}{5}$ din rest, adică (150 lei : 5) $\times$ 4 = 120 lei.

**IV.128.** Cei doi băieți mai puțin înseamnă 30 — 2 = 28. Reprezentăm grafic datele problemei :

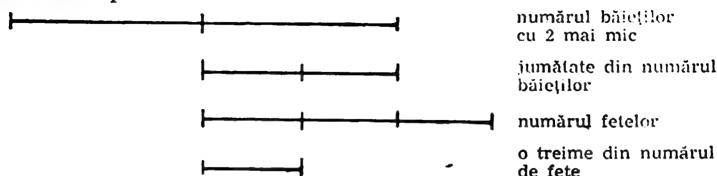



*Fig. IV.128.a.*

Așadar, putem exprima grafic cu ajutorul a o treime din numărul fetelor situația celor 28 de elevi astfel :




*Fig. IV.128.b.*

Deci numărul de 28 de elevi corespunde la 7 părți egale. egale fiecare cu o treime din numărul fetelor, adică 28 : 7 = 4. Rezultă că o treime din numărul fetelor este reprezentată de 4 fete. Găsim că numărul fetelor este 4 $\times$ 3 = 12, iar al băieților (28 — 12) + 2 = 14 + 2 = 16. Verificare : 12 + 16 = 30.

**IV.129.** Figurăm datele problemei :

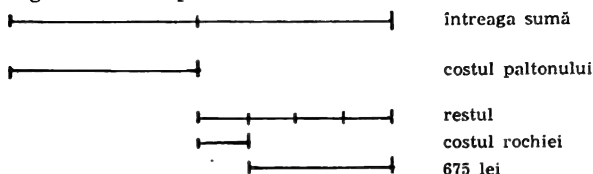



*Fig. IV.129.*

Se observă că 675 lei reprezintă $\frac{3}{8}$ din întreaga sumă. $\frac{1}{8}$ din întreaga sumă (costul rochiei) este 675 lei : 3 = 225 lei. Deci întreaga sumă este : 225 lei $\times$ 8 = 1 800 lei.

**IV.130.** $a = 2\,568$ ; $b = 2\,568 : 6 = 428$ ; $c = (428 : 4) \times 3 = 321$ ;
$b + c = 428 + 321 = 749$ ; $d = (749 : 7) \times 5 = 107 \times 5 = 535$
$a + b + c + d = 2\,568 + 428 + 321 + 535 = 3\,852$.

**IV.131.** În prima zi s-au trimis (18 540 t : 9) $\times$ 2 = 2 060 t $\times$ 2 = 4 120 t. Restul după prima zi este : 18 540 t — 4 120 t = 14 420 t. A doua zi s-au trimis (14 420 t : 5) $\times$ 3 = 8 652 t. În a treia zi s-au trimis 14 420 t — — 8 652 t = 5 768 t.

**IV.132.** Transpunem în desen datele problemei :

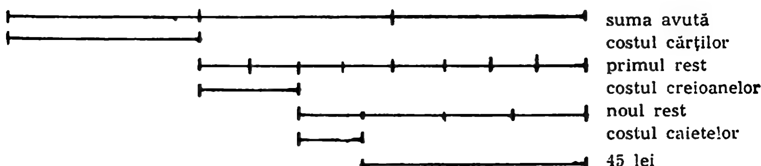



*Fig. IV.132.*

Se observă că un sfert din noul rest reprezintă 15 lei, deci noul rest este de 60 lei. Trecînd peste unele etape se observă că suma avută este de 120 lei. Verificați !

**IV.133.** Priviți desenul :

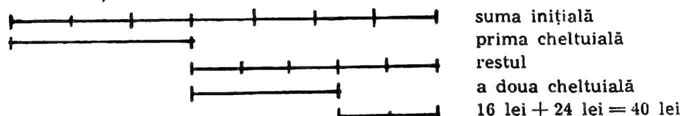



*Fig. IV.133.*

Se constată că 40 lei reprezintă $\frac{2}{5}$ din restul după prima cheltuială. $\frac{1}{5}$ din rest reprezintă 20 lei, deci restul este 100 lei ce reprezintă $\frac{4}{7}$ din sumă. $\frac{1}{4}$ din sumă reprezintă 100 lei : 4 = 25 lei, deci suma a fost 25 lei $\times$ 7 = 175 lei.

**IV.134.** Sumele de bani pe care le au la început pot fi reprezentate în desen astfel :

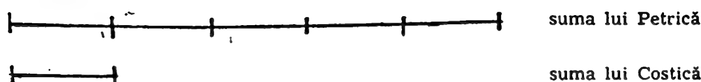



*Fig. IV.134.a.*

După împrumut sumele se reprezintă astfel :




*Fig. IV.134.b.*

Se observă că suma, la un loc, a celor doi elevi prima dată este formată din 6 părţi egale, iar a doua oară — aceeaşi sumă, din 3 părţi egale. Înseamnă că o parte din situaţia a doua, care este suma lui Costică, este formată din două părţi egale din situaţia întîi, care este suma iniţială a lui Costică. Aşadar, Petrică dîndu-i 120 lei lui Costică înseamnă că a dublat suma iniţială a lui Costică. Rezultă că, la început, Costică a avut 120 lei, iar Petrică 120 lei $\times$ 5 = 600 lei.

**IV.135.** $\frac{3}{4}$ din 2 640 înseamnă : (2 640 : 4) $\times$ 3 = 1 980. Două jumătăţi din 20 înseamnă 20. Avem de rezolvat următoarea problemă : găsiţi numărul x, ştiind că : (1 980 + 20) : x = 500, deci 2 000 : x = 500, adică x = 4.

**IV.136.** S-au plantat : (4 800 : 5) $\times$ 2 = 960 $\times$ 2 = 1 920 (meri). (4 800 : : 8) $\times$ 3 = 600 $\times$ 3 = 1 800 (peri) ; 4 800 : 6 = 800 (caişi) şi 4 800 — — (1 920 + 1 800 + 800) = 280 (pruni).

**IV.137.** S-au vîndut 40 de cărţi de ştiinţă ; au mai rămas 240 — 40, adică 200 cărţi. Din acestea s-au vîndut (200 : 5) $\times$ 2, adică 80 cărţi de poveşti, iar restul de 120, cărţi de colorat. Cărţile ştiinţifice costă 20 lei $\times$ 40 = = 800 lei, cele de poveşti costă (20 lei + 5 lei) $\times$ 80 = 2 000 lei, iar cele de colorat [(20 lei + 25 lei) : 5] $\times$ 120 = 1 080 lei. Valoarea totală este 3 880 lei. Verificaţi !

**IV.138.** Pentru a afla cîţi pui şi cîte găini sînt, folosim desenul din figura IV.138.a., care inspiră următoarele calcule : 920 — 690 = 230 ; 230 : 2 = 115. Deci găini sînt 115, iar pui sînt 690 + 115 adică 805. Se vînd 805 : 5 adică 161 pui şi (115 : 5) $\times$ 3 adică 69 găini. Pentru a afla preţul unui pui şi apoi al unei găini apelăm tot la metoda grafică (Fig. IV.138.b.) :

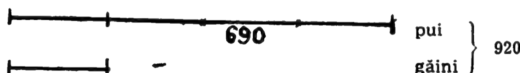



*Fig. IV.138.a.*

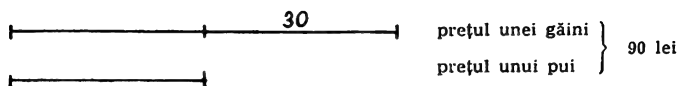


*Fig. IV.138.b.*

Un pui costă : (90 lei — 30 lei) : 2 = 60 lei : 2 = 30 lei. O găină costă : 30 lei + 30 lei = 60 lei. S-au încasat : (30 lei × 161) + (60 lei × × 69) = 8 970 lei.

**IV.139.** Desenul ne convinge că un sfert din economia Ioanei reprezintă 24 lei : 3 = 8 lei ; deci suma avută de Ioana este 8 lei × 4 = 32 lei.

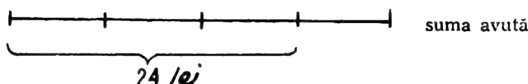


*Fig. IV.139.*

**IV.140.** a) În primele două luni realizează $\frac{6}{9}$, iar restul este $\frac{3}{9}$ adică $\frac{1}{3}$ din numărul de piese planificate ce reprezintă 9 000 de piese. Deci planul a fost de 27 000 piese.

b) 14 400 ; 7 200 ; 5 400.

**IV.141.**

$$\frac{\frac{11}{5}-\frac{6}{5}}{7}+\frac{\frac{16}{8}}{7}+\frac{4}{7}=\frac{\frac{5}{5}}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{7}{7}=1.$$

**IV.142.**

$$\left(\frac{12}{11}-\frac{5}{11}+\frac{11}{11}-\frac{7}{11}\right)\cdot\left(\frac{15}{17}+\frac{4\times17}{17}-\frac{8}{17}-\frac{3\times17}{17}-\frac{7}{17}\right)=$$

$$=\left(\frac{7}{11}+\frac{11}{11}-\frac{7}{11}\right)\cdot\left(\frac{15}{17}+\frac{68}{17}-\frac{8}{17}-\frac{51}{17}-\frac{7}{17}\right)=$$

$$=\left(\frac{18}{11}-\frac{7}{11}\right)\cdot\left(\frac{83}{17}-\frac{8}{17}-\frac{51}{17}-\frac{7}{17}\right)=\frac{11}{11}\cdot\left(\frac{75}{17}-\frac{51}{17}-\frac{7}{17}\right)=$$

$$=1\cdot\left(\frac{24}{17}-\frac{7}{17}\right)=\frac{17}{17}=1.$$

**IV.143.** a) x = 800 — 47,8 ; x = 752,2 ;
b) x = 9,78 + 28,5 = 38,28.

**IV.144.** Al treilea număr este 16 336,75 — 10 702,50 = 5 634,25.
Al doilea număr este 6 712,25 — 5 634,25 = 1 078.
Primul număr este 10 702,50 — 1 078 = 9 624,50.

**IV.145.** Fiecare robinet curge în bazin, într-un minut, respectiv 1 l, 2 l, 4 l, iar într-o oră, respectiv 60 l, 120 l, 240 l. Cele trei robinete curg împreună într-o oră 420 l, iar în 10 ore 4 200 l adică 42 hl. Din această

cantitate se scurg spre grădină 18 dal·10 = 180 dal = 18 hl. Deci în bazin se vor găsi 42 hl — 18 hl = 24 hl.

**IV.146.** În bazin curge cantitatea de 5 hl + 7 hl = 12 hl într-o oră. Se scurge într-o oră prin țeavă cantitatea de 600 l = 6 hl. Rămîn în fiecare oră în bazin 12 hl — 6 hl = 6 hl. Deci bazinul, de 4 800 l = 48 hl, se umple în 48 : 6 adică în 8 ore.

**IV.147.** După o oră de zbor, primul avion a parcurs 428 km care trebuie recuperați de al doilea avion. Această recuperare se poate realiza pentru că viteza medie a celui de al doilea este cu 535 km — 428 km = = 107 km mai mare, ceea ce îi permite să ajungă pe primul avion în 428 : 107 adică în 4 ore.

**IV.148.** Datele problemei pot fi figurate într-un desen :

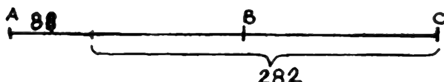



*Fig. IV.148.*

Avem deci distanța de la B la C : (282 — 88) : 2 = 97 (km), iar cea de la A la B : 282 km — 97 km = 185 km.

**IV.149.** AB = 149 km ; BC = 133 km.

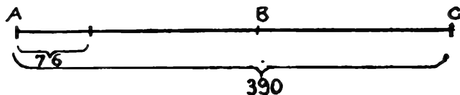



*Fig. IV.150.*

**IV.150.** a) Deci : distanța *BC* este (390 — 76) : 2 = 157 (km), iar cea de la A la B : 157 km + 76 km = 233 m.

b) În 390 : 65 = 6 (ore).

c) În 3 ore de mers, autoturismul străbate 65 km·3 = 195 km. Dacă pleacă de la A către C atunci se va afla la 233 km — 195 km = 38 km de orașul B, între A și B. Dacă pleacă de la C către A, atunci se va afla tot la 195 km — 157 km = 38 km, tot între A și B.

**IV.151.** Viteza în sensul curentului este de 280 km : 7 = 40 km pe oră. În sens contrar curentului viteza este de 35 km pe oră. Deci parcurge, la întoarcere, distanța în 280 : 35 = 8 (ore).

**IV.152.** 6 pătrate : ABCD, AMOQ, QOPD, PONC, NOMB, MQPN.

12 triunghiuri : AMQ, QOM, MBN, NOM, PQD, POQ, PCN, PON, QMN, QPN, MQP, MNP.

**IV.153.** Gardul viu are 304 dam : 4 = 76 dam = 760 m.

Gardul din scînduri are : (3 040 m : 2) — 20 m = 1 500 m.

Restul din gard este de 3 040 m — (760 m + 1 500 m) = 780 m.

Gardul din sîrmă fără poartă are 780 m — 4 m = 776 m. S-au folosit 776 m·3 = 2 328 m de sîrmă.

**IV.154.** Semiperimetrul este de 4 800 m : 2 = 2 400 m. Desenul ne inspiră la următoarele calcule :

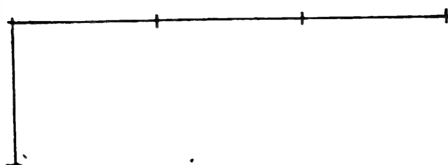


*Fig. IV.154.*

2 400 m : 4 = 600 m, adică lățimea, lungimea este de 600 m·3 = 1 800 m.

**IV.155.** Desenul ne inspiră să observăm că perimetrul terenului se poate exprima prin numărul ce se obține înmulțind pe 8 cu măsura în decametri a lățimii, pentru că în problemă avem informația că lungimea este de trei ori mai mare ca lățimea.

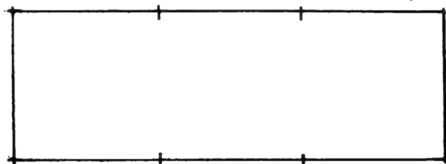


*Fig. IV.155.a.*

Deci : lățimea are 40 dam : 8 = 5 dam = 50 m iar lungimea 50 m·3 = 150 m. Prefabricatele s-au folosit pe cele „două lungimi", deci 150 m·2 = 300 m. Gardul viu pe cele „două lățimi", deci 50 m·2 = 100 m.

b) Reprezentăm datele problemei în desenul ce urmează :

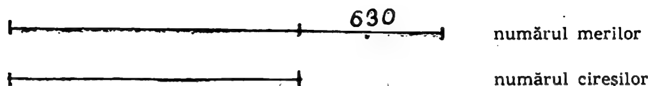



*Fig. IV.155.b.*

Din datele problemei avem că 2 500 este suma dintre numărul merilor și al cireșilor. Dacă din această sumă scădem diferența obținem 2 500 — 630 = 1 870 adică, după cum se observă din desen, de două ori numărul cireșilor care este 1 870 : 2 = 935.

Așadar, cireși s-au plantat 935 iar meri cu 630 mai mulți, deci : 935 + 630 = 1 565.

Verificare : 1 565 + 935 = 2 500.

**IV.156.** Privind desenul, constatăm că latura unui pătrat este de patru ori mai mică decît a celuilalt pătrat.

Cum suma dintre lungimea laturii unui pătrat și lungimea laturii celuilalt este 25 înseamnă că lungimea laturii pătratului inițial este de 25 m : 5 = 5 m, iar a celuilalt 5 m × 4 = 20 m.

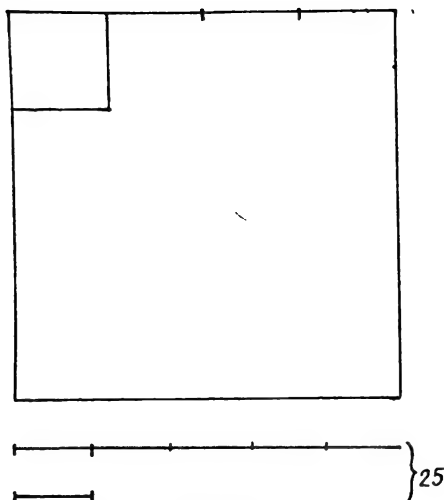



*Fig. IV.156.*

**IV.157.** a) Semiperimetrul primului dreptunghi este de 750 cm : 2 = = 375 cm iar lungimea lui de 375 cm — 75 cm = 300 cm. Semiperimetrul celui de-al doilea dreptunghi este 500 cm iar lungimea lui este 500 cm — 75 cm = 425 cm, deci trebuie mărită cu 425 cm — 300 cm adică cu 125 cm.

b) Latura este 250 cm, iar aria 250 $\times$ 250 adică 62 500 $cm^2$ = = 625 $dm^2$.

**IV.158.** Vom neglija coperțile și foile cărților care nu sînt luate în seamă la numerotare. Vom considera că cele două volume sînt așezate cu cotorul către exterior. PRIMA SITUAȚIE : volumul I în stînga și cel de al doilea în dreapta, în raport de cum privim biblioteca. Jumătate din numărul de pagini din al doilea volum este 151. Aceasta înseamnă că între prima pagină a volumului întîi și pagina care arată jumătate din numărul de pagini ale celui de al doilea volum sînt paginile cu numerele : 152 ; 153 ; ... ; 302, adică în total 151. SITUAȚIA A DOUA : volumul al doilea în stînga și primul în dreapta, față de cum privim biblioteca. Jumătate din numărul de pagini din al doilea volum este tot 151. Între prima pagină a volumului întîi care se găsește în dreapta și pagina care arată jumătate din numărul de pagini ale celui de al doilea volum sînt paginile cu numerele : 2 ; 3 ; 4 ; ... ; 366 ; 1 ; 2 ; ... 150, adică 365 + 150 = 515.

**IV.159.** a) Pentru paginile 1, 2, ..., 9, 10 s-au folosit de 11 ori. Pentru paginile 11, ..., 20 s-au folosit de 20 de ori. În continuare pentru paginile 21, 22, ..., 98, 99 s-au folosit de 7 $\times$ 20 + 18 = 158 ori. Pentru pagina 100 încă de trei ori. În total, de 11 + 20 + 158 + 3 = 192 ori.

b) Pentru primele 100 pagini s-au folosit cifrele de 192 ori. Au mai rămas de folosit de $315 - 192 = 123$ ori. Pentru paginile 101, 102, ..., 140 s-au folosit de $30 \times 4 = 120$ ori. Au mai rămas trei cifre pentru pagina 141. Deci 141 pagini are cartea.

**IV.160.** a) $15 \times (302 - 300) = 15 \times 2 = 30$ ; Deci propoziţia este adevărată.

b) $6 \times 100 + 101 - 25 = 600 + 101 - 25 = 701 - 25 = 676$.
Deci propoziţia nu este adevărată. Este o propoziţie falsă.

**IV.161.** $3 \times b = 11 - a$. În cazul cînd $b = 0$ avem $a = 11$ ; dacă $b = 1$, avem $a = 8$ ; dacă $b = 2$ avem $a = 5$ ; dacă $b = 3$ avem $a = 2$. Numărul $b$ nu poate fi mai mare decît 3, căci $11 - b$ nu poate fi numărul 12.

**IV.162.** $a = 106 + 14\,085 - 3\,057 = 11\,134$ ;
$b = 0 + 50 + 50 + 0 = 100$ deci $a : b = 11\,134 : 100 = 111{,}34$.

**IV.163.** 1) $15 + 10 + (15 \times 10) = 175$ ;
2) $17 + 0 + 17 \times 0 = 17$
3) $0 + 9 + (0 \times 9) = 9$
4) $a + 0 + (a \times 0) = 66$ adică $a + 0 + 0 = 66$ deci $a = 66$
5) $a + 1 + (a \times 1) = 9$ adică $a + 1 + a = 9$ sau $a + a = 8$ de unde $a = 4$
6) $7 + b + (7 \times b) = 23$ adică $b + (7 \times b) = 23 - 7$, $b + (7 \times b) = 16$. Imaginăm următorul desen :




*Fig. IV.163.*

Se observă că $b = 16 : 8 = 2$.

**IV.164.** Se observă că numerele date 3 şi 2 trebuie să fie două din oricare cele trei numere. Avem de rezolvat problema $3 + 2 + x = 10$ unde $x = 5$. Una din posibilităţi ar fi :



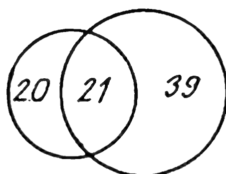

*Fig. IV.164.a.*

Aceasta este imposibilă, că $3 + 2 + 2$ nu este 10. Rămîne rezultatul următor :




*Fig. IV.164.b.*

**IV.165.** Privim desenul şi ne dăm seama de ce trebuie să efectuăm următoarele calcule :




41 franceză  60 engleză

*Fig. IV.165.*

80 — 41 = 39 care știu numai engleză ; 80 — 60 = 20 care știu numai franceză. Știu ambele limbi : 41 — 20 = 21 sau altfel : 60 — 39 = 21.

**IV.166.** a) 9 ; b) numai franceză învață 9 elevi iar numai engleză învață 12 elevi.

**IV.167.** a) Mai întîi aflăm numărul de trei cifre. La cifra sutelor pot fi numerele 1, 3, 5, 7, 9. Rămîn numai 1 sau 3, căci 5 × 2 = 10 etc. și la cifra zecilor avem o singură cifră nu două. Dacă la cifra sutelor avem numărul 1, atunci la cifra unităților avem numărul zero, deoarece acesta trebuie să fie mai mic ca 1. În acest caz avem 120 dar 20 nu se împarte exact la 6. Avem deci singura situație, 360 lungimea celor cinci platforme. Fiecare din ele are lungimea de 72 m. Conform datelor problemei găsim că lățimea unei platforme este 72 : 2 — 10 = 26 (m).

b) Semiperimetrul unei platforme este 72 m + 26 m = 98 m iar lungimea unui picior este 102 m.

c) 800 t × (4 × 5) = 16 000 t.

d) La cifra unităților putem avea : 0, 2, 4, 6, 8. Deoarece la zeci trebuie să avem cu 4 mai mult decît la unități, numerele corespunzătoare sînt : 4, 6, 8, 10, 12. Pe loc de cifre nu pot fi decît 4, 6, 8 deci am avea numerele 40, 62, 84. Din acestea, doar 84 se împarte exact la 6. Deci conducta are 84 km.

**IV.168.** Avem pe rînd următoarele operații : 8, 0, 0 ; 3, 5, 0 ; 3, 2, 3 ; 3, 0 (se varsă jos), 3 ; 0, 3, 3 ; 0, 5, 1.

**IV.169.** Presupunem că au fost vîndute toate merele cu prețul de 8 lei kg. În acest mod s-ar fi încasat 8 lei × 210 = 1 680 lei și nu 1 510 lei, deci ar fi fost o diferență în plus de 1 680 lei — 1 510 lei = 170 lei provenită de la diferența de 2 lei a prețurilor. Înseamnă că s-au vîndut 170 : 2 = = 85 (kg) de 6 lei și restul de 210 — 85 = 125 (kg) de 8 lei.

**IV.170.** Avem $x < 420 - 390$ adică $x < 30$. Rezultă că $x$ poate fi oricare din numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 27, 28, 29.

**IV.171.** $x$ nu poate fi zero deoarece numărul nu ar mai fi de patru cifre. Din condiția a) avem că $x + y + t$ este mai mic sau egal cu 15. Cum $x$ nu este zero înseamnă că $x = 1$. Folosind condiția b) și apoi condiția c) găsim : $x = 1$, $y = 3$, $t = 5$ sau $x = 2$, $y = 4$, $t = 6$ sau $x = 3$, $y = 5$, $t = 7$.

# CLASA A V-A

## REZOLVĂRILE ȘI REZULTATELE EXERCIȚIILOR ȘI PROBLEMELOR PENTRU CLASA A V-A

**V.1.** a) 1 ; b) 16 ; c) 31 985.

**V.2.** $403 - 204 + 439 \cdot 608 - 108\,875 + 68\,103 =$
$= 199 + 266\,912 - 108\,875 + 68\,103 =$
$= 267\,111 - 108\,875 + 68\,103 = 226\,339.$

**V.3.** $3 + 10 \cdot [362 + 10 \cdot (24 + 6)] =$
$= 3 + 10 \cdot [362 + 10 \cdot 30] =$
$= 3 + 10 \cdot (362 + 300) = 3 + 10 \cdot 662 = 6\,623.$

**V.4.** $1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - (2 + 2) \cdot 65] \cdot 150\} =$
$= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - 4 \cdot 65] \cdot 150\} =$
$= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot [265 - 260] \cdot 150\} =$
$= 1\,500 + \{50 + 5 \cdot 5 \cdot 150\} = 1\,500 + \{50 + 3\,750\} =$
$= 1\,500 + 3\,800 = 5\,300.$

**V.5.** $\{[21 - 5 + 12] : 4 + 5\} \cdot 10 - [(4 + 9) \cdot 5 - 60] =$
$= \{28 : 4 + 5\} \cdot 10 - [13 \cdot 5 - 60] = \{7 + 5\} \cdot 10 - (65 - 60) =$
$= 12 \cdot 10 - 5 = 115.$

**V.6.** $2^{74} : 2^{73} + 103 \cdot (2 + 204) = 2 + 103 \cdot 206 = 21\,220.$

**V.7.** $3\,125 - 5 \cdot (2 + 212) + (2 \cdot 3)^7 : (2^4 \cdot 3^5) =$
$= 3\,125 - 5 \cdot 214 + (2^7 \cdot 3^7) : (2^4 \cdot 3^5) =$
$= 3\,125 - 1\,070 + 2^3 \cdot 3^2 = 2\,055 + 72 = 2\,127.$

**V.8.** $8 + 2^2 \cdot 2 + 2^8 : 2^5 + 2^{10} : [2^5 \cdot (3 + 1)] - 4 \cdot 8 =$
$= 8 + 8 + 2^3 + 2^{10} : [2^5 \cdot 4] - 32 =$
$= 16 + 8 + 2^{10} : 2^7 - 32 =$
$= 24 + 2^3 - 32 = 24 + 8 - 32 = 0.$

**V.9.** $3^{87} : (3^{17})^5 + 7 \cdot (352 - 175) =$
$= 3^{87} : 3^{85} + 7 \cdot 177 = 9 + 1\,239 = 1\,248.$

**V.10.** $(3^{203} + 10^{249}) : (3^{203} + 10^{249}) = 1.$

**V.11.** $[2^{17} + 5^{95} - 3 \cdot (3^{10})] : (2^{17} + 5^{95} - 3^{11}) = 1.$

**V.12.** $[2^{30}+3^{20}+6^{10}]:[(2\cdot 3)^{10}+2^{30}+3^{20}]=1.$

**V.13.** 56.

**V.14.** $10\cdot\{324:324+2\cdot[(2^{30}\cdot 3^{15}):(2^{29}\cdot 3^{15})+1]\}=$
$=10\cdot\{1+2\cdot[2+1]\}=10\cdot\{1+2\cdot 3\}=10\cdot 7=70.$

**V.15.** $8+[0+3\cdot 81-81]:\{9\cdot[301-10\cdot(24+2\cdot 3)]\}=$
$=8+[2\cdot 81]:\{9\cdot[301-10\cdot 30]\}=8+162:\{9\cdot[301-300]\}=$
$=8+162:9=8+18=26.$

**V.16.** $3^{100}:[3^{98}+(3^{25})^5:3^{27}+(4-1)^{90}\cdot 3^8]=$
$=3^{100}:[3^{98}+3^{125}:3^{27}+3^{90}\cdot 3^8]=$
$=3^{100}:[3^{98}+3^{98}+3^{98}]=$
$=3^{100}:(3\cdot 3^{98})=$
$=3^{100}:3^{99}=3.$

**V.17.** Se observă că una din paranteze este $10\,000-100^2=$ $=10\,000-10\,000=0$. Deci $E=0$.

**V.18.** $316\cdot(147-47)=316\cdot 100=31\,600.$

**V.19.** $(5\,739\cdot 4\,325-4\,324\cdot 5\,739)-5\,738=$
$=5\,739\cdot(4\,325-4\,324)-5\,738=5\,739\cdot 1-5\,738=1.$

**V.20.** Conform textului putem figura datele astfel :

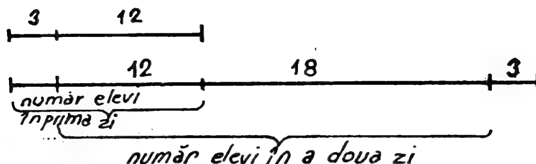



*Fig. V.20.a.*

Se constată că în clasă sînt $3+12+18+3$, adică 36 elevi. Un alt desen care ar ilustra situația dată, este :

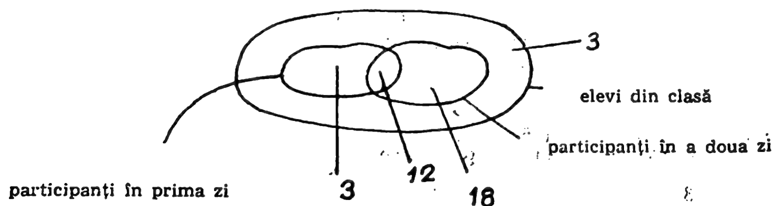



*Fig. V.20.b.*

V.21.

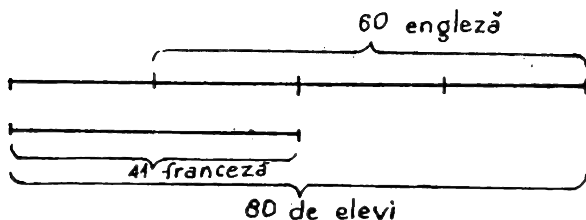
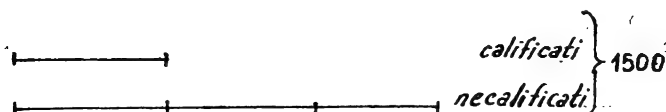



*Fig. V.21.*

a) 80 — 60 = 20 ;
b) 80 — 41 = 39 ;
c) 41 — 20 = 21 ; sau altfel : 60 — 39 = 21 sau astfel : 41 + 60 — — 80 = 101 — 80 = 21.

V.22.




S-au calificat la faza județeană, 1 500 : 4 = 375.

V.23.

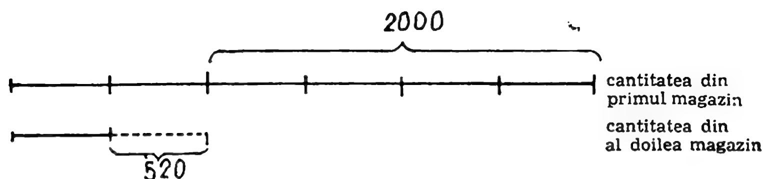



*Fig.V.23.*

Observăm că 2 000 + 520 = 2 520 (kg) reprezintă de 5 ori mai mult decît cantitatea adusă în al doilea magazin. Deci în al doilea magazin s-au adus 2 520 : 5, adică 504 kg, iar în primul 504 kg · 6 = 3 024 kg.

V.24.

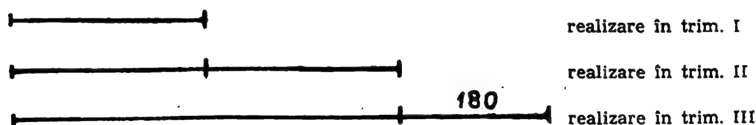



*Fig. V.24.*

Din textul problemei, avem că detaşamentul a realizat 3 060 lei + 540 lei = 3 600 lei. Observăm că în trimestrul I a realizat (3 600 lei — — 180 lei) : 5 = 684 lei.

Aşadar, pînă la sfîrşitul trimestrului al doilea s-au realizat 684 lei · · 3 = 2 052 lei.

**V.25.** Figurăm cele două situaţii comparativ.

Observăm că suma 690 este 2 + 3 · 7 adică de 23 ori mai mare decît primul număr. Avem primul număr 690 : 23 = 30 şi al doilea, 30 · 7 = 210.

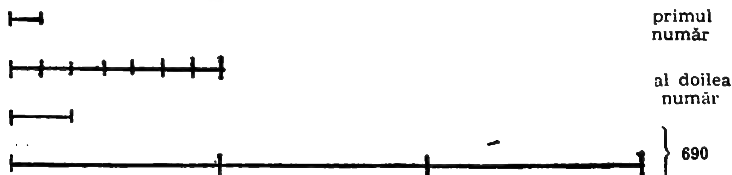



*Fig. V.25.*

**V.26.** Datele problemei, figurate în desen, ne conduc la ideea că dacă la suma de 63 lei adunăm 7 lei, obţinem de două ori preţul pixului şi al cărţii împreună, adică 35 lei.

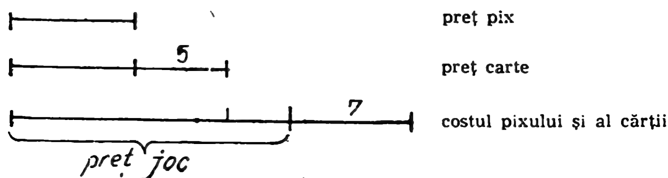



*Fig. V.26.*

În acest mod găsim preţul pixului (35 — 5) : 2 = 15 (lei) şi preţul cărţii de 15 lei + 5 lei = 20 lei. Rezultă preţul jocului 63 — 35 = 28 (lei).

**V.27.** Putem imagina cele două situaţii din problemă, în două figuri :

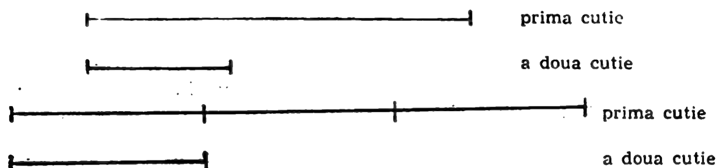



*Fig. V.27.*

În a doua situaţie avem 820 : 4 = 205 creioane, în a doua cutie. Dacă acum luăm 41 de creioane din această cutie obţinem 205 — 41 = = 164, adică numărul de creioane cerut. În prima cutie sînt 820 — 164 = = 656 creioane.

**V.28.** În depozitul mic sînt (3 560 — 60) : 2 — 920 adică 830 t, în cel mare sînt 3 560 — 830 adică 2 730 t.

**V.29.** Textul conduce la următorul desen :

În prima ladă sînt (612 — 2) : 5 adică 122 kg. În a doua ladă 122 kg · 2 = 244 kg, iar în a treia 244 kg + 2 kg = 246 kg.

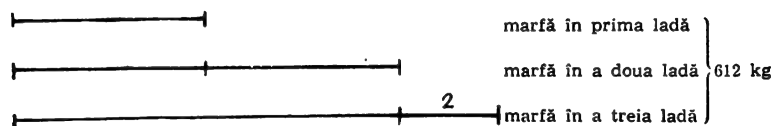



*Fig. V.29.*

**V.30.**

Se observă că : $a = (900 - 25) : 7 = 125$ ; $b = 3 \cdot 125 = 375$ și $c = 375 + 25 = 400$.

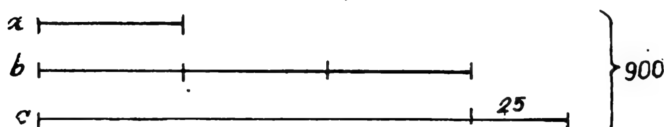



*Fig. V.30.*

**V.31.** 242, 121, 246.

**V.32.**

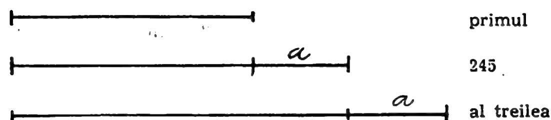



*Fig. V.32.*

În desen se sugerează că suma este de trei ori mai mare decît al doilea număr, adică 3 · 245 = 735.

**V.33.** Cînd se deschide o carte, numărul care se găsește pe pagina din stînga este număr par, iar cel de pe pagina din dreapta este număr impar. Deci avem problema : suma a două numere naturale consecutive este numărul 217 ; aflați numerele.

Rezolvare : 217 — 1 = 216, 216 : 2 = 108 este numărul de pe pagina din stînga, iar 109 cel de pe pagina din dreapta.

**V.34.** Conform textului putem imagina următorul desen :

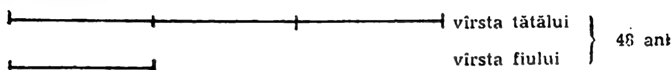



*Fig. V.34.a.*

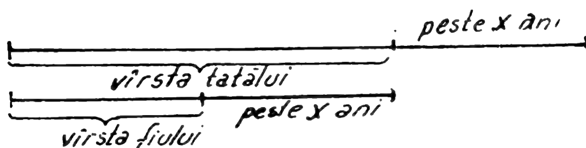



*Fig. V.34.b.*

Se observă că vîrsta fiului este $48 : 4 = 12$ (ani).

Constatăm că vîrsta fiului este egală cu numărul de ani pretins de problemă. Deci peste 12 ani vîrsta tatălui va fi mai mare de două ori decît a fiului.

**V.35.** Textul problemei permite să ne imaginăm următorul desen unde s-a notat cu $a$ numărul mic.

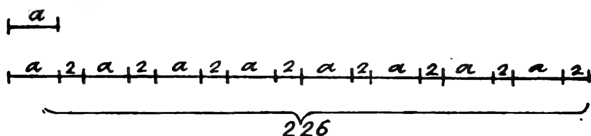



*Fig. V.35.*

Se observă că $7 \cdot a$ este $226 - 8 \cdot 2$ adică 210. Deci $7 \cdot a = 210$ adică primul număr, $a$, este $210 : 7 = 30$. Al doilea număr este $226 + 30 = 256$.

**V.36.**

Datele problemei le ilustrăm într-un desen şi avem $270 - (24 + 81 + 132) = 33$.

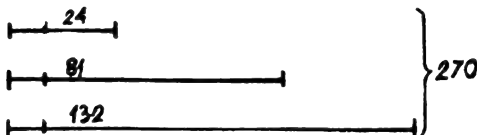



*Fig. V.36.*

Acest număr reprezintă de 3 ori cît se scade din fiecare număr, adică $33 : 3 = 11$. Deci numerele sînt 35 ; 92 şi 143.

**V.37.** a) Figurăm, în desen, situația vîrstelor din prezent :

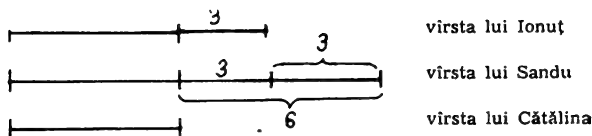



*Fig. V.37.a.*

Figurăm în desen, situația vîrstelor din trecut :

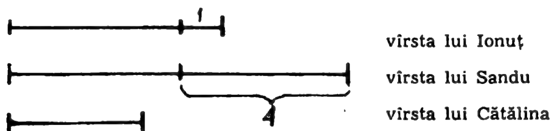



*Fig. V.37.b.*

Comparînd situațiile se constată că acum doi ani, Sandu avea cu 3 ani mai mult decît Ionuț. Deoarece atunci vîrsta lui Sandu era egală cu suma vîrstelor celorlalți doi rezultă că vîrsta Cătălinei era cît diferența dintre vîrstele celorlalți doi, adică 3 ani. Așadar acum Cătălina are 5 ani, Sandu are $5 + 6$, adică 11 ani, iar Ionuț cu 3 ani mai puțin decît Sandu adică 8 ani.

b) Peste 14 ani cei trei copii au următoarele vîrste : Ionuț are 22 ani, Sandu are 25 ani, Cătălina 19 ani. Suma vîrstelor lor este $22 + 25 + 19 = 66$ (ani).

Figurăm situația vîrstelor părinților :

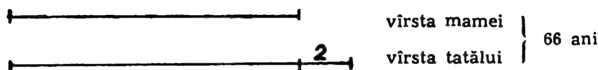



*Fig. V.37.c.*

Deci mama are $(66 - 2) : 2 = 32$ (ani), iar tata $32 + 2 = 34$ (ani).

**V.38.**

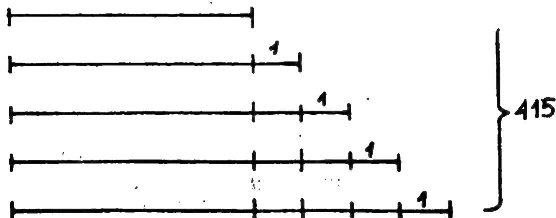



*Fig. V.38.*

Din datele problemei constatăm că fiecare număr diferă de precedentul cu 1. Numărul mic, este (415 — 10) : 5 = 81. Celelalte numere sînt : 82, 83, 84, 85, 86.

**V.39.** Reformulăm o parte din problemă : 27 de bile sînt roşii sau galbene şi 39 de bile sînt negre sau galbene. Situaţia este figurată în următorul desen :

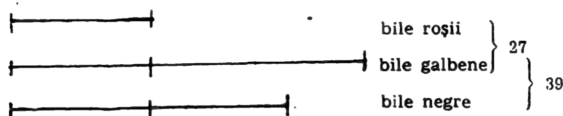



*Fig. V.39.*

Observăm că diferenţa dintre numărul de bile negre şi numărul de bile roşii este 39 — 27 adică 12. Cum bilele roşii sînt de două ori mai puţine avem : bile roşii 12, bile negre 24 iar bile galbene 15.

**V.40.** Figurăm datele problemei :

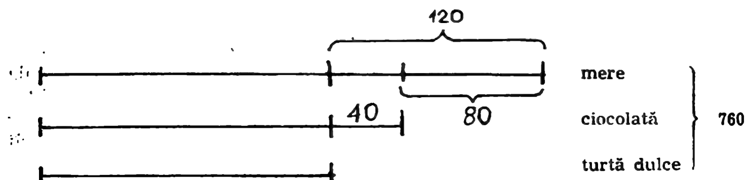



*Fig. V.40.*

Se va observa că turtă dulce avem în număr de [760 — (40 + + 120)] : 3, adică 200 bucăţi, ciocolată 240 bucăţi, iar mere 320 bucăţi. Rezultă că se pot realiza maxim 200 de pachete, adică atîtea cîte bucăţi de turtă dulce avem.

**V.41.** Textul poate fi schiţat în desen astfel :

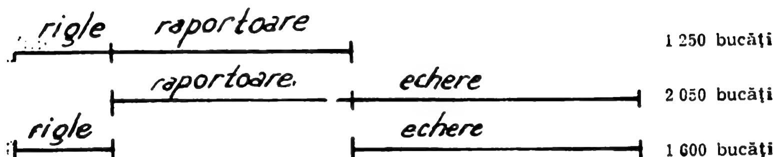



*Fig. V.41.*

Se observă că de două ori numărul de rigle, raportoare şi echere, luate împreună, reprezintă 1 250 + 2 050 + 1 600 = 4 900 (bucăţi). Deci, rigle, raportoare şi echere, la un loc, avem 4 900 : 2 = 2 450 (bucăţi).

Avem 1 200 echere, 400 rigle, 850 raportoare. Rezultă că se pot forma 400 de truse.

**V.42.** Datele problemei se pot figura astfel :

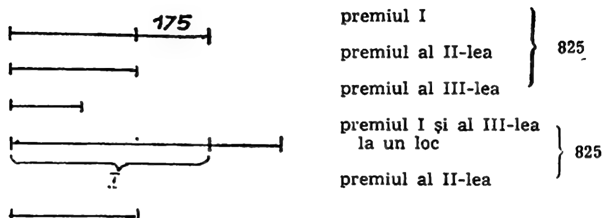



*Fig. V.42.*

Constatăm că cele trei premii la un loc reprezintă de trei ori premiul al doilea. Deci premiul al doilea este $825 : 3 = 275$ (lei). Premiul I este $275 + 175 = 450$ (lei). Premiul al treilea este $825 - (450 + 275) = 100$ (lei).

**V.43.**

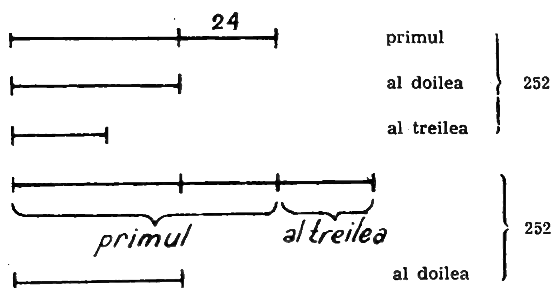



*Fig. V.43.*

Se observă că suma 252 este de trei ori premiul al doilea. Deci acesta este 252 lei : 3 = 84 lei. Primul este 108 lei, al treilea este 60 lei.

**V.44.**

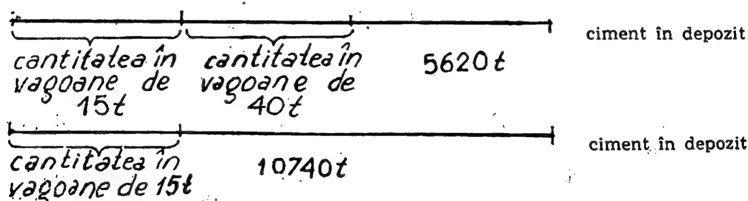



*Fig. V.44.*

Se observă că 10 740 t — 5 620 t = 5 120 t reprezintă cantitatea încărcată în vagoane de cîte 40 t fiecare.

Rezultă că avem 5 120 t : 40 = 128 vagoane de 40 t fiecare. Asemănător, raționăm pentru vagoanele de 15 t : (9 880 — 5 620) : 15 = 284.

Cantitatea de ciment este 5 120 t + 9 800 t = 15 000 t.

**V.45.**

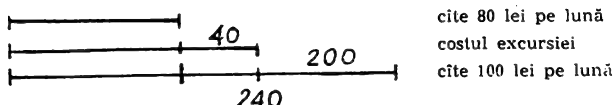



*Fig. V.45.*

În cazul cînd ar economisi cîte 100 lei pe lună, față de costul excursiei, ar avea în plus 200 lei, ceea ce înseamnă că față de economisirea cu 80 lei pe lună înseamnă o diferență de 240 lei care provine de la surplusul de 20 lei pe lună. Deci economisește în 240 : 20 = 12 luni ; costul excursiei de 12·100 — 200 = 1 000 (lei).

**V.46.** Dacă luăm cîte un elev din fiecare bancă unde am așezat cîte trei și îi așezăm cîte doi în cele 4 bănci libere ne rămîn 3 elevi în picioare. Deci în așezarea elevilor cîte 3 au fost ocupate 4·2 + 3 = 11 bănci. În clasă sînt 11 + 4 = 15 bănci și 15·2 + 3 = 33 elevi.

**V.47.** Să reducem problema la alta : să punem cîte un elev într-o bancă. În prima situație din problemă ar însemna că ar trebui să avem număr dublu de bănci față de cel existent, dar tot ar rămîne 9 elevi în picioare. Figurăm în desen :

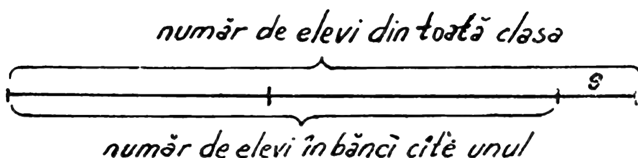



*Fig. V.47.a.*

În situația a doua, din problemă, ar trebui să avem un număr de bănci de trei ori mai mare decît numărul de bănci existent (punînd cîte un elev într-o bancă). Figurăm în desen, comparativ cu desenul precedent (Fig. V.47.b.).

Conform textului, 7 bănci sînt neocupate ; aceasta ar însemna 7·3 adică 21 elevi și încă doi elevi care s-ar așeza în banca ocupată de un singur elev, în total 23 elevi.

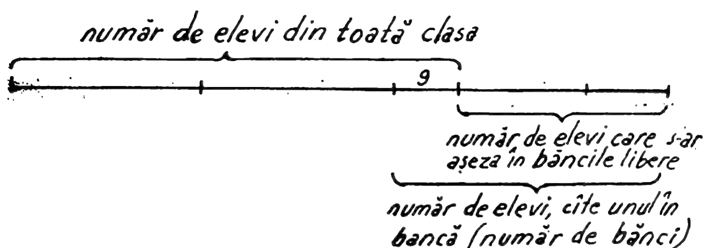


*Fig. V.47.b.*

Observăm, în desen, că numărul de elevi așezați cîte unul în bancă este $9 + 23$ adică 32 elevi, tocmai numărul de bănci. Deci în clasă sînt 32 de bănci și $32 \cdot 2 + 9 = 73$ de elevi.

**V.48.** 45 elevi și 20 de bănci.

**V.49.** 19 ; 2.

**V.50.** 40 ; 12.

**V.51.** 458 ; 27.

**V.52.** Notăm : $a$, numărul mare, $b$, numărul mic. Teorema împărțirii cu rest permite : $a = 5 \cdot b + 141$.

Realizăm desenul următor :

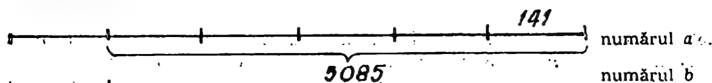


*Fig. V.52.*

Constatăm că $4 \cdot b = 5\,085 - 141$, adică $4\,b = 4\,944$. Deci $b = 1\,236$ iar $a = 6\,321$.

**V.53.** Se observă că diferența numerelor este 36.

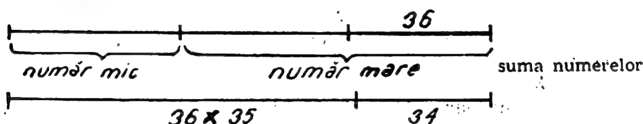


*Fig. V.53.*

Din teorema împărțirii cu rest avem că suma numerelor este $36 \cdot 35 + 34 = 1\,294$. Deci de două ori numărul mic este $1\,294 - 36 = 1\,258$.

Rezultă că numărul mic este $1\,258 : 2 = 629$ iar cel mare este $629 + 36 = 665$.

**V.54.** Din teorema împărțirii cu rest avem numerele naturale $c_1$ și $c_2$ astfel încît $c_1 \cdot 5 + 4 = c_2 \cdot 6 + 5$, care se mai scrie $c_1 \cdot 5 = c_2 \cdot 6 + 5 - 4$ adică $c_1 \cdot 5 = c_2 \cdot 6 + 1$. Aceasta se mai poate scrie succesiv : $c_1 \cdot 5 = c_2 \cdot 5 + c_2 + 1$ sau $c_1 = (c_2 \cdot 5) : 5 + (c_2 + 1) : 5$ sau $c_1 = c_2 + (c_2 + 1) : 5$. Pentru ca $c_1$ să fie număr natural trebuie ca $(c_2 + 1) : 5$ să fie număr natural.

Se cere cel mai mic număr: aceasta este posibil cînd $c_2 = 4$. Rezultă că numărul cerut este $4 \cdot 6 + 5 = 29$.

**V.55.** Notăm cu $\overline{abc}$ numărul cerut. Avem $a - c = 4$. Deoarece $\overline{abc}$ trebuie să fie împărțitor și restul este 100, din teorema împărțirii cu rest avem $100 < \overline{cba}$ deci $\overline{cba}$ are trei cifre, deci $c \neq 0$. Cum $a > 4$ avem situațiile $a = 5$ și $c = 1$, $a = 6$ și $c = 2$, $a = 7$ și $c = 3$, $a = 8$ și $c = 4$, $a = 9$ și $c = 5$.

Din teorema împărțirii cu rest mai avem: $\overline{abc} = \overline{cba} \cdot 2 + 100$. Deci avem situațiile: $\overline{5b1} = \overline{1b5} \cdot 2 + 100$, $\overline{6b2} = \overline{2b6} \cdot 2 + 100$, $\overline{7b3} = \overline{3b7} \cdot 2 + 100$, $\overline{8b4} + \overline{4b8} \cdot 2 + 100$ și $\overline{9b5} + \overline{5b9} \cdot 2 + 100$. Din acestea, dă soluție doar $\overline{6b2} = \overline{2b6} \cdot 2 + 100$ unde $b = 9$ și $\overline{abc} = 692$.

**V.56.** Dacă ar fi apartamente numai de cîte 2 camere atunci în bloc ar fi, în total $42 \cdot 2 = 84$ (camere). Înseamnă că surplusul de $140 - 84 = 56$ (camere) provine de la diferența $4 - 2 = 2$ (camere). Deci sînt apartamente de 4 camere, în total, $56 : 2 = 28$ iar de cîte 2 camere, în total, $42 - 28 = 14$. Verificați.

**V.57.** Presupunem că s-au vîndut numai bilete de 4 lei. În această ipoteză (condiție) toate biletele ar costa $415 \cdot 4 = 1\,660$ (lei). Față de suma încasată, înseamnă că diferența de 2 160 lei — 1 660 lei = 500 lei provine de la diferența dintre prețurile biletelor care este de 2 lei. Deci s-au vîndut $500 : 2 = 250$ bilete de 6 lei și restul de 165 bilete, cu prețul de 4 lei. Verificați.

**V.58.** Dacă ar fi numai oi, înseamnă că ar fi $650 \cdot 4 = 2\,600$ picioare adică $2\,600 - 2\,260 = 340$ picioare în plus. Acestea provin de la diferența de $4 - 2 = 2$ picioare în plus la fiecare oaie față de o găină. Avem, deci, $340 : 2$ adică 170 găini și restul de $650 - 170 = 480$ oi.

**V.59.** Dacă s-ar fi folosit numai bancnote de 25 lei, covoarele ar fi costat 25 lei $\cdot$ 148 = 3 700 (lei). Diferența de $6\,850 - 3\,700 = 3\,150$ (lei) provine de la diferența dintre valorile bancnotelor de 100 lei — 25 lei = = 75 lei. Așadar s-au folosit $3\,150 : 75 = 42$ de bancnote de 100 lei și restul de $148 - 42$ adică 106 bancnote de 25 lei.

**V.60.** Scriem datele problemei astfel:

20 băieți, 16 fete, 328 kg
10 băieți, 30 fete, 340 kg

Dacă fiecare număr din prima situație se împarte cu 2 obținem:

10 băieți, 8 fete, 164 kg
10 băieți, 30 fete, 340 kg

Observăm că 22 de fete au recoltat 176 kg, deci o fată a recoltat 176 kg : 22 = 8 kg. Un băiat a recoltat $(164 - 8 \cdot 8) : 10 = 10$ (kg).

**V.61.**

5 caiete, 2 pixuri, 40 lei
10 caiete, 5 pixuri, 95 lei
10 caiete, 4 pixuri, 80 lei
10 caiete, 5 pixuri, 95 lei
zero caiete, 1 pix, 15 lei

Deci pixul costă 15 lei, iar un caiet $(40 - 15 \cdot 2) : 5$, adică 2 lei.

**V.62.** Schematic putem rezolva astfel :

5 cărţi, 3 caiete, 64 lei
3 cărţi, 5 caiete, 48 lei

15 cărţi, 9 caiete, 192 lei
15 cărţi, 25 caiete, 240 lei

zero cărţi, 16 caiete, 48 lei.

Rezultă că un caiet costă 48 lei : 16 = 3 lei, iar o carte 11 lei. Dacă s-ar fi cumpărat numai 13 caiete ele ar fi costat doar $13 \cdot 3$ adică 39 lei şi ar mai fi rămas 103 lei — 39 lei = 64 lei, diferenţă care provine de la diferenţa de 11 lei — 3 lei = 8 lei de la fiecare carte. Deci s-au cumpărat 64 : 8 = 8 cărţi şi 5 caiete.

**V.63.** Automobilul „înaintează" faţă de tren cu o distanţă de timp, egală cu diferenţa dintre viteza automobilului şi cea a trenului care este de 64 — 46 = 18 (km). Deci într-o oră automobilul străbate pe lîngă tren 18 km. Aceasta înseamnă că într-un minut străbate 18 000 m : 60 = 300 m, care este chiar lungimea trenului.

**V.64.** Motociclistul ajunge în Bucureşti după 184 : 46 adică după 4 ore, deci la ora 13. Stă o oră şi pleacă spre Focşani la ora 14. Timp de 5 ore biciclistul parcurge $23\ m \cdot 5 = 115$ km. La ora 14 între cei doi mai este o distanţă de 184 km — 115 km = 69 km pe care se deplasează unul către celălalt. Pînă la întîlnirea lor, pe această distanţă timpul este de 69 : (23 + + 46) adică de o oră. Aşadar se întîlnesc la ora 15.

**V.65.** $(A \cup B) \cap C = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\} \cap \{0 ; 7 ; 8\} = \{0\}$.

**V.66.** $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30, 60\}$ ;
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 15, 30, 60\}$ ;
$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$ ; $A - B = \{7, 8\}$ ;
$B - A = \{1, 2, 12, 15, 30, 60\}$.

**V.67.** Avem : $4x + 1 \leq 17$ ; $4x \leq 16$ cu soluţiile elementele mulţimii $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ; $B = \{3, 6, 9, 12\}$ ;
$C = \{6, 12, 18, 24\}$ ; $D = \{4, 7, 10, 13\}$ ;
b) $(A \cap C) \cup B = \{6\} \cup B = B$ ;
c) $(A \cup B) \cap C = \{2, 4, 6, 8, 9, 12\} \cap C = \{6, 12\}$ ;
d) $(A - C) \cap D = \{2, 4, 8\} \cap D = \{4\}$ ;
e) $(C \cap D) - B = \emptyset - B = \emptyset$.

**V.68.** $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$ $B = \{2, 6, 14\}$ ; $C = \{4, 36, 196\}$.
Avem : a) $(A \cup B) \cap C = \{1, 2, 4, 8, 16, 6, 14\} \cap C = \{4\}$ ; b) $(A - B) \cup C = \{1, 4, 8, 16\} \cup C = \{1, 4, 8, 16, 36, 196\}$ ; c) $A - \emptyset = A$.

**V.69.** Avem $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Într-un desen figuraţi întîi afirmaţia b), apoi c) şi ţineţi în final seama de a). Avem : $A = \{4, 5, 3, 7\}$, $B = \{4, 5, 2, 6\}$.

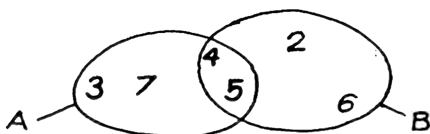



*Fig. V.69.*

**V.70.** Dacă cele două mulțimi sînt egale, reuniunea are 3 elemente. Dacă intersecția lor are 2 elemente, reuniunea are 4 elemente. Dacă intersecția are un element, reuniunea are 5 elemente. Dacă sînt disjuncte, reuniunea are 6 elemente.

**V.71.**

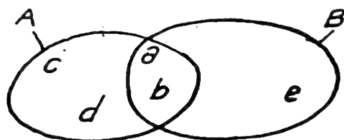



*Fig. V.71.*

**V.72.** Din a) avem că $3 \in X$ și $3 \in Y$, $5 \in X$ și $5 \in Y$, $7 \in X$ și $7 \in Y$. Din b) avem că $2 \in X$ și $2 \notin Y$, $6 \in X$ și $6 \notin Y$. Din a), b), c) avem că $1 \notin X$ și $1 \in Y$, $4 \notin X$ și $4 \in Y$. Deci $X = \{3, 5, 7, 2, 6\}$ și $Y = \{3, 5, 7, 1, 4\}$.

**V.73.** Se pot imagina diagramele următoare :

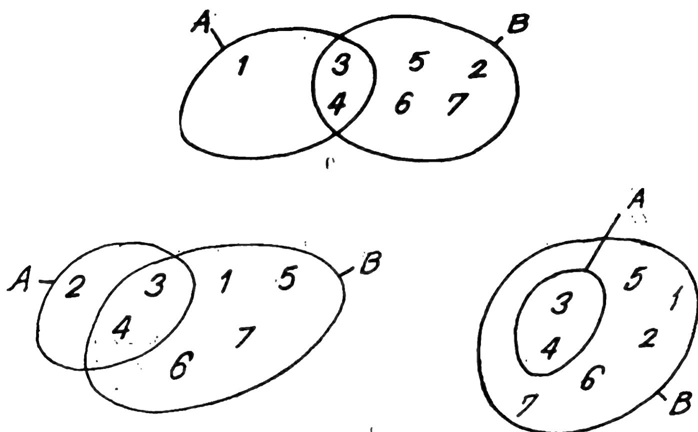



*Fig. V.73.*

Deci sînt 3 soluții.

**V.74.** Observăm că cele 3 mulțimi nu au elemente comune. Așadar, $A = \{4, 5, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$ și $C = \{6, 7, 2, 3\}$.

b) Avem : $(C - A) \cap B = \{6, 7\} \cap B = \{6, 7\}$.

Deci $\{2a ; 7\} = \{6, 7\}$ implică $2a = 6$, unde $a = 3$.

Rezultă că perimetrul este $3 \cdot 4 = 12$ (cm).

**V.75.** Condiția b) ne dă că $X$ și $Y$ au ca elemente comune pe 4 ; 6 ; 9.

Condiția c) permite cu siguranță că la mulțimea $X$ să mai punem elementele 1 și 8.

Condiția d) mai adaugă la $Y$ elementele 5 și 7.

Rămîn în discuție elementele 3 și 2, care conform condiției a) trebuie să aparțină cel puțin uneia din mulțimi $X$ și $Y$. Din condiția d) obținem că $3 \notin Y$ și $3 \notin \{2, 4, 8\}$.

Rezultă că $3 \in X$. Avem că $X = \{4, 6, 9, 1, 8, 3\}$ și $Y = \{4, 6, 9, 5, 7, 2\}$.

**V.76.** Deoarece $A \cup B = A \cap B$ înseamnă că $A \cup B$ și $A \cap B$ trebuie să aibă aceleași elemente. $1 \in A \cup B$ și $1 \in A \cap B$ rezultă că $y = 2$. Asemănător, găsim că $x = 3$.

**V.77.** $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$.

**V.78.** Avem $ab + ac = a(b + c) = 5 \cdot 10 = 50$ ;
$ab - ac = a(b - c) = 5 \cdot 8 = 40$.

**V.79.** $x(a + b) = 20$, $x \cdot 5 = 20$, $x = 4$.

b) $x(3b + 2a - c) = 40$, $x(c + 20 - c) = 40$.

În paranteză putem scrie $(c + 20) - c$.

Dacă dintr-o sumă de două numere scădem unul din numere, obținem ca rezultat pe celălalt număr. Deci $(c + 20) - c = 20$.

Avem deci, $x \cdot 20 = 40$, $x = 2$.

**V.80.** $a = 7x + 7 + 3x + 1 = (7x + 3x) + (7 + 1) =$
$= x(7 + 3) + 8 = x \cdot 10 + 8 = 10 \cdot x + 8$ ;
$b = 4x + 4 + 6x + 12 = 4x + 6x + 4 + 12 = 10x + 16$

Se observă că $b$ este mai mare cu 8 decît $a$.

**V.81.** Dacă $x$ este par se poate scrie $x = 2k$ și atunci factorul lui $y$, $3x + 2$ devine $3 \cdot 2k + 2 = 2(3k + 1)$ deci număr par și deci și $y$ este număr par. Dacă $x$ este impar se poate scrie $x = 2k + 1$ și atunci factorul lui $y$, $x + 3$ devine $2k + 1 + 3 = 2k + 4 = 2(k + 2)$ deci număr par și deci și $y$ este număr par.

**V.82.** a) Prima egalitate devine $a(b + c) = c(b + c)$. Deoarece $b + c = 15$, obținem $a \cdot 15 = b \cdot 15$ care ne conduce la $a = c$. b) Cu relația găsită, obținem $c + 2b + c = 2c + 2b = 2(b + c) = 2 \cdot 15 = 30$. c) Deoarece $a = c$ avem $(c^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - c^2) = 0$.

**V.83.** a) Avem :

$7 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^n = 3^n \cdot (7 + 2) = 3^n \cdot 9 = 3^n \cdot 3^2 = 3^{n+2}$ ;

b) $7 \cdot 5^n - 2 \cdot 5^n = 5^n(7 - 2) = 5^n \cdot 5 = 5^{n+1}$.

**V.84.** $3^{2n+1} = 3^{2n} \cdot 3 = (3^2)^n \cdot 3 = 9^n \cdot 3 = 3a$;
$3^{4n} = 3^{2 \cdot 2n} = (3^2)^{2n} = 9^{2n} = (9^n)^2 = a^2$.

**V.85.** a) Al 6-lea termen este $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21$.

b) Dacă a are un singur termen, avem $a = 1$ care este pătratul lui 1. Se observă că $a$ se scrie astfel $1 + 2 \cdot (3 + 2 \cdot 5 \cdot 6 + 7 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 + \ldots)$ deci $a$ este un număr impar. S-a putut da factor comun numărul 2, pentru că din două numere naturale consecutive unul este par și se constată că această proprietate este îndeplinită de toți termenii începînd cu locul doi. Toți termeni începînd cu locul trei conțin ca factor pe 10 sau divizorii proprii ai lui 10. Se poate spune că suma acestor termeni are ca cifră a unităților cifra zero. Suma $1 + 2 \cdot 3$ are ca cifră a unităților pe 7. Numărul $a$ are cifra unităților, cifra 7. Cum $a$ este impar, un pătrat impar are cifra unităților doar 1, 5 și 9. Deci dacă $a$ are numărul termenilor mai mare ca 1, nu este pătrat.

**V.86.** Se observă că $d = 8$ și vom avea : $\overline{2abc8} + \overline{abc83} = 83\,781$.
Găsim că $c = 9$ și avem egalitatea : $\overline{2ab98} + \overline{ab983} = 83\,781$.
Asemănător, obținem : $b = 7$ și $a = 5$. Deci numărul este 257 983.

**V.87.** Avem de rezolvat exercițiul $\overline{xy} - \overline{yx} = 45$. Se constată că $x \neq 0$ și $y \neq 0$ și în plus $x > y$. Începînd cu cifra zecilor, observăm că avem următoarele situații : $x = 6$ și $y = 1$, $x = 7$ și $y = 2$, $x = 8$ și $y = 3$, $x = 9$ și $y = 4$. Deci numerele : 61, 72, 83 și 94.

**V.88.** a) $3 \cdot (1 + 2) \cdot 4 + 1 = 37$;
b) $3 \cdot 1 + 2 \cdot (4 + 1) = 13$;
c) $3 \cdot (1 + 2 \cdot 4) + 1 = 28$;
d) $3 \cdot (1 + 2 \cdot 4 + 1) = 30$;
$(3 \cdot 1 + 2) \cdot (4 + 1) = 25$;
$(3 \cdot 1) + (2 \cdot 4) + 1 = 12$.

**V.89.** Avem : $(10 - 1) \cdot (100 - 1) \cdot (1\,000 - 1) = 3^6 \cdot 11 \cdot 111$;
$9 \cdot 99 \cdot 999 = 3^6 \cdot 11 \cdot 111$; $9 \cdot (9 \cdot 11) \cdot (9 \cdot 111) = 3^6 \cdot 11 \cdot 111$;
$9^3 \cdot 11 \cdot 111 = 3^6 \cdot 11 \cdot 111$; $(3^2)^3 \cdot 11 \cdot 111 = 3^6 \cdot 11 \cdot 111$.
Rezultă că propoziția este adevărată.

**V.90.** Trebuie să aflăm numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ și $\overline{abdc}$, cel mare fiind, anul nașterii, $\overline{abcd}$. Condiția c) permite să scriem egalitatea $\overline{cd} - \overline{dc} = 9$. Aceasta înseamnă că diferența dintre cifrele zecilor este 1, adică $c - d = 1$. Deci avem perechile : $c = 9$, $d = 8$; $c = 8$, $d = 7$; $c = 7$, $d = 6$; $c = 6$, $d = 5$; $c = 5$, $d = 4$; $c = 4$, $d = 3$; $c = 3$, $d = 2$; $c = 2$, $d = 1$; $c = 1$, $d = 0$.

Rezultă că problema nu are o singură soluție. Avem deci anii de naștere, una din perechile : 1998, 1989 ; 1987, 1978 ; 1976, 1967 ; 1965, 1956 ; 1954, 1945 ; 1943, 1934 ; 1932, 1923 ; 1921, 1912 ; 1910, 1901.

**V.91.** $\{3[4(5x + 1) - 3] - 2\} = 2 : 2$; $3[4(5x + 1) - 3] = 1 + 2$;
$4(5x + 1) - 3 = 1$; $4(5x + 1) = 4$; $5x + 1 = 1$; $5x = 0$; $x = 0$.

**V.92.** $\{2\cdot[14+(5+x):6]-5\}:9=3$ ; $2\cdot[14+(5+x):6]-5=27$ ;
$2\cdot[14+(5+x):6]=32$ ; $14+(5+x):6=16$ ;
$(5+x):6=2$ ; $5+x=12$ ; $x=7$.

**V.93.** $3\cdot\{16+5\cdot[27^2-6\cdot(x-3\cdot 32)]\}+1=1\,985-1$
$3\cdot\{16+5\cdot[729-6\cdot(x-96)]\}=1\,983$
$16+5\cdot[729-6\cdot(x-96)]=1\,983:3$
$5\cdot[729-6(x-96)]=661-16$
$729-6\cdot(x-96)=645:5$
$6\cdot(x-96)=729-129$ ; $6\cdot(x-96)=600$
$x-96=100$ ; $x=196$.

**V.94.** $9-9:3=[17-3\cdot 0]\cdot x$ ; $9-3=17\cdot x$ ; $6=17\cdot x$ ; $x\notin N$.

**V.95.** Avem : $x+2+3\cdot y+6=34$ ; $x+3y+8=34$ ;
$x+3y=26$ ; $x=26-3y$. Deci :

| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 20 | 17 | 14 | 11 | 8 | 5 | 2 |

**V.96.** $32-4+5x<63$, $28+5x<63$, $5x<63-28$,
$5x<35$, $x\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

**V.97.** $x-\{57-4\cdot[10+(2^{75}\cdot 5^{50}):(2^{73}\cdot 5^{50})]\}\cdot 5\leqslant 5$ ;
$x-\{57-4\cdot[10+2^2]\}\cdot 5\leqslant 5$ ; $x-\{57-4\cdot 14\}\cdot 5\leqslant 5$ ;
$x-\{57-56\}\cdot 5\leqslant 5$ ; $x-1\cdot 5\leqslant 5$ ; $x\leqslant 10$,
deci $x\in\{0, 1, 2, 3,\dots 10\}$.

**V.98.** 28 ; 91.

**V.99.** În orice poziție va fi așezată una din cifrele date, numărul este divizibil cu 3 căci $1+2+3+6$ este un număr divizibil cu 3. Deci avem : 1 236 ; 1 263 ; 1 326 ; 1 362 ; 1 623 ; 1 632 ; 2 136 ; 2 163 ; 2 316 ; 2 361 ; 2 613 ; 2 631 ; 3 126 ; 3 162 ; 3 216 ; 3 261 ; 3 612 ; 3 621 ; 6 123 ; 6 132 ; 6 213 ; 6 231 ; 6 312 ; 6 321.

Numerele divizibile cu 6, sînt numai numerele pare dintre cele de mai sus.

**V.100.** a) $x\in\{0, 5\}$ ; b) Trebuie să fie divizibile cu 2 și cu 3. Cu 2 : 210, 212, 214, 216, 218.

Din acestea sînt divizibile cu 3 : 210, 216.

Deci $x\in\{0, 6\}$ ; c) $x=6$.

**V.101.** Se știe ca dacă un număr e divizibil cu 15 atunci el este divizibil cu 5 și cu 3. Deoarece numărul nostru este divizibil cu 5 înseamnă că $y=0$ sau $y=5$. Dacă $y=0$, numărul are forma $\overline{41x780}$. Deoarece este divizibil cu trei avem că $20+x$ este divizibil cu 3 deci $x$ este 1, 4 sau 7 și avem numărul cel mai mic căutat : 411780. Dacă $y=5$ continuăm raționamentul asemănător și găsim numărul cel mai mare : 418785.

**V.102.** Dacă numărul este divizibil cu 15 atunci este divizibil cu 5 şi cu 3. Din divizibilitatea cu 5 avem $\overline{25a70}$ sau $\overline{25a75}$. Din divizibilitatea cu 3 avem pentru $\overline{25a70}$, $2+5+7+0+a$ adică $14+a$ divizibil cu 3 deci $a \in \{1, 4, 7\}$, iar pentru $\overline{25a75}$, $2+5+7+5+a$ adică $19+a$ deci $a \in \{2, 5, 8\}$. Rezultă că :

| a | 1 | 4 | 7 | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 0 | 0 | 0 | 5 | 5 | 5 |

O condiţie suplimentară pentru soluţie unică poate fi de exemplu, săfie impar şi divizibil cu 9.

**V.103.** a) Pentru ca $\overline{12y}$ să fie divizibil cu 12 trebuie să fie număr par. Dintre numerele 120, 122, 124, 126, 128 sînt divizibile cu 4 numerele 120, 124, 128. Divizibil cu 3 este numai 120 deci $A = \{120\}$. Pentru ca $\overline{1ab}$ să fie divizibil cu 15 trebuie să fie divizibil cu 5, deci avem $\overline{1a0}$ sau $\overline{1a5}$. Cazul $\overline{1a0}$ : pentru a fi divizibil cu 3, trebuie ca $1+a$ să fie unul din numerele 3, 6, 9 deci $a$ este 2, 5 respectiv 8. Rezultă numerele 120, 150, 180. Cazul $\overline{1a5}$ : pentru a fi divizibil cu 3, trebuie ca $6+a$ să fie unul din numerele : 6, 9, 12, 15 deci a este 0, 3, 6 respectiv 9. Rezultă numerele 105, 135, 165, 195. Avem $B = \{120, 150, 180, 105, 135, 165, 195\}$.
b) $A \cup B = B$ ; $A \cap B = A$ ; $A - B = \emptyset$ ; $B - A = \{150, 180, 105, 135, 165, 195\}$.

**V.104.** Afirmaţia $6 \mid 10 + x$ se poate traduce astfel : 6 este divizor al numărului $10 + x$ cu condiţia $x \leqslant 20$. 6 este divizor al numerelor 12, 18, 24, 30 etc.

Deci : $x \in \{2, 8, 14, 20\} = M$.

**V.105.** Un număr este divizibil cu 15 cînd este divizibil cu 5 şi cu 3. Divizibilitatea cu 5 conduce la $b = 0$ sau $b = 5$. Cazul $b = 0$, ne dă $5 + a$ divizibil cu 3 adică $a = 1$ sau $a = 4$ sau $a = 7$, deci $x$ poate fi unul din numerele 2 130, 2 430, 2 730. Cazul $b = 5$, ne dă $10 + a$ divizibil cu 3 adică $a = 2$ sau $a = 5$ sau $a = 8$, deci $x$ mai poate fi unul din numerele 2 235, 2 535, 2 835.

Avem $A = \{2\,130, 2\,430, 2\,730, 2\,235, 2\,535, 2\,835\}$.

Un număr este divizibil cu 18 cînd este divizibil cu 2 şi cu 9. Divizibilitatea cu 2 ne conduce la cazurile $\overline{2m30}$, $\overline{2m32}$, $\overline{2m34}$, $\overline{2m36}$, $\overline{2m38}$ iar divizibilitatea cu 9 la numerele $y$ respectiv, 2 430, 2 232, 2 034 şi 2 934, 2 736, 2 538. Aşadar $B = \{2\,430, 2\,232, 2\,034, 2\,934, 2\,736, 2\,538\}$.

În final găsim : $A \cap B = \{2\,430\}$ ; $A \cup B = \{2\,130, 2\,430, 2\,730, 2\,535, 2\,235, 2\,835, 2\,232, 2\,034, 2\,934, 2\,736, 2\,538\}$ ; $B - A = \{2\,232, 2\,034, 2\,934, 2\,736, 2\,538\}$ şi deci $(A \cap B) - (A \cup B) = \emptyset$, $(A \cup B) \cap (B - A) = \{2\,232, 2\,034, 2\,934, 2\,736, 2\,538\} = B - A$.

**V.106.** Din rezolvarea problemei precedente rezultă că avem numerele 2 130 şi 2 835.

**V.107.** Fie numărul cerut de forma $\overline{abc}$. Divizibilitateă cu 18 se realizează cînd numărul este divizibil cu 2 şi cu 9. Din divizibilitatea cu 2 rezultă cazurile $\overline{ab0}$, $\overline{ab2}$, $\overline{ab4}$, $\overline{ab6}$, $\overline{ab8}$. Din condiţiile a) şi b) avem numerele : 210, 432, 654, 876, 234, 456, 578. Din acestea divizibile cu 9 avem : 234 şi 432.

**V.108.** Din textul problemei, numărul este divizibil cu 18 deci cu 2 şi cu 9. Din divizibilitatea cu 2 înseamnă că $y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ vom avea numere de forma : $\overline{619x70}$, $\overline{619x72}$, $\overline{619x74}$, $\overline{619x76}$ şi $\overline{619x78}$. Pentru divizibilitatea cu 9 avem în fiecare caz : $9 \mid 23 + x$, $9 \mid 25 + x$, $9 \mid 27 + x$, $9 \mid 29 + x$ şi $9 \mid 31 + x$. Cel mai mare număr de forma cerută va fi cînd $x$ este cel mai mare, fiind pe ordinul sutelor. Aceasta se obţine în cazul $9 \mid 27 + x$ pentru $x = 9$ şi obţinem numărul 619 974. Cel mai mic număr cerut este în cazul $9 \mid 27 + x$ pentru $x = 0$ adică 619 074.

Celelalte numere sînt : 619 470, 619 272, 619 776 şi 619 578.

**V.109.** Condiţiile a) şi b) conduc la aflarea numerelor naturale de forma $\overline{a90b}$ divizibile cu 18, adică cu 2 şi cu 9. Divizibilitatea cu 2 dă numerele $\overline{a900}$, $\overline{a902}$, $\overline{a904}$, $\overline{a906}$, $\overline{a908}$. Divizibilitatea cu 9 dă respectiv : 9 900, 7 902, 5 904, 3 906, 1 908.

Condiţia d) se exclude pentru că toate sînt numere pare, deci mai mult decît trei. Condiţia e) se exclude căci toate sînt mai mari decît 1 000.

Ultima condiţie impune numerele : 9 900, 5 904 şi 1 908.

**V.110.** Condiţia ca numărul să fie divizibil cu 36 este echivalentă cu condiţia ca numărul să fie divizibil cu 4 şi 9. Dacă este cu 4 înseamnă că este par deci trebuie să găsim numere de forma $\overline{abc0}$, $\overline{abc2}$, $\overline{abc4}$, $\overline{abc6}$, $\overline{abc8}$. Deoarece $c$ şi $d$ sînt consecutive rămîn numai cazurile $\overline{ab12}$, $\overline{ab34}$, $\overline{ab56}$, $\overline{ab78}$. Divizibile cu 4 sînt doar $\overline{ab12}$ şi $\overline{ab56}$. Divizibilitatea cu 9 ne conduce în primul caz la $a + b + 1 + 2 = 9$ sau $a + b + 1 + 2 = 18$, adică la $a + b = 6$ sau $a + b = 15$. Avem deci : $a = 1$, $b = 5$ ; $a = 2$, $b = 4$ ; $a = 3$, $b = 3$ ; $a = 4$, $b = 2$ ; $a = 5$, $b = 1$ ; $a = 6$, $b = 0$ sau $a = 6$, $b = 9$ ; $a = 7$, $b = 8$ ; $a = 8$, $b = 7$ ; $a = 9$ $b = 6$.

În al doilea caz, asemănător, $a + b + 5 + 6 = 18$ sau $a + b + 5 + 6 = 27$, adică $a + b = 7$ sau $a + b = 16$. Avem deci : $a = 1$, $b = 6$ ; $a = 2$, $b = 5$ ; $a = 3$, $b = 4$ ; $a = 4$, $b = 3$ ; $a = 5$, $b = 2$ ; $a = 6$, $b = 1$ ; $a = 7$, $b = 0$ sau $a = 7$, $b = 9$ ; $a = 8$, $b = 8$ ; $a = 9$, $b = 7$. Rezultă $A = \{$1 512, 2 412, 3 312, 4 212, 5 112, 6 012, 6 912, 7 812, 8 712, 9 612, 6 156, 7 056, 7 956, 8 856, 9 756, 1 656, 2 556, 3 456, 4 356, 5 256$\}$.

**V.111.** Pentru divizibilitatea cu 15 este nevoie de divizibilitatea cu 5, deci $\overline{7a80}$ sau $\overline{7a85}$ şi cu 3 pentru care avem $A = \{$7 080, 7 380, 7 680, 7 980, 7 185, 7 485, 7 785$\}$.

Pentru divizibilitatea cu 40 este nevoie de divizibilitatea cu 10 deci forma $\overline{7x80}$ şi de divizibilitatea cu 8 adică $\overline{x80}$ divizibil cu 8. Obţinem $B = \{$7 080, 7 280, 7 480, 7 680, 7 880$\}$. $A \cup B = \{$7 080, 7 380, 7 680, 7 980, 7 185, 7 485, 7 785, 7 280, 7 480, 7 880$\}$ ; $A \cap B = \{$7 080, 7 680$\}$ ; $B - A = \{$7 280, 7 480, 7 880$\}$.

**V.112.** Notăm cu $\overline{abc}$, numărul căutat. Folosind c) numărul are una din formule : $\overline{4b0}$, $\overline{5b1}$, $\overline{6b2}$, $\overline{7b3}$, $\overline{8b4}$, $\overline{9b5}$. Din a) rezultă că $abc$ este par, deci avem una din formule : $\overline{4b0}$, $\overline{6b2}$, $\overline{8b4}$. Condiţia b) impune ca numărul să nu fie divizibil cu 5, iar la împărţirea cu 5 să se obţină restul 2. Rămîne să avem doar număr de forma $\overline{6b2}$. Conform cu a) trebuie să fie divizibil şi cu 11. Dintre numerele $\overline{6b2}$, este divizibil cu 11 doar 682.

**V.113.** Faptul că numărul cerut este divizibil cu 45 conduce la divizibilitatea lui cu 5 şi cu 9. Dacă e divizibil cu 5 atunci $y = 0$ sau $y = 5$. Cazul $y = 0$, conduce la forma $\overline{3x60}$. Dacă e divizibil cu 9 atunci $3 + x + 6 + 0$ este un număr divizibil cu 9, deci $9 + x$ e divizibil cu 9 şi deci $x$ poate fi numai $9 \, (x \neq 0$, căci $y \neq 0)$. Avem numărul 3 960. Cazul $y = 5$ ne conduce la 3 465.

**V.114.** Pentru a fi divizibil cu 45 trebuie să fie divizibil cu 5 (şi avem formele : $\overline{495a0}$ sau $\overline{495a5}$) şi cu 9. În primul caz trebuie ca $4 + 9 + 5 + a + 0$ adică $18 + a$ să fie divizibil cu 9, deci $a = 0$ sau $a = 9$. Rezultă că numerele sînt 49 500 şi 49 590. În cazul al doilea trebuie ca $23 + a$ să fie divizibil cu 9, deci $a = 4$ şi avem numărul 49 545.

**V.115.** Pentru ca numărul $\overline{4xy}$ să fie divizibil cu 45 trebuie să fie divizibil cu 5 şi cu 9. Divizibilitatea cu 5 ne conduce la cazurile : $\overline{4x0}$ sau $\overline{4x5}$. Pentru ca numărul să fie divizibil cu 9 trebuie să avem în cazul $\overline{4x0}$, $4 + x = 9$ unde $x = 5$. În cazul $\overline{4x5}$, trebuie să avem $4 + 5 + x = 9$ sau $4 + 5 + x = 18$ adică, $x = 0$ sau $x = 9$. Deci avem : $x = 5$ şi $y = 0$ ; $x = 0$ şi $y = 5$ ; $x = 9$ şi $y = 5$.

**V.116.** Scriem numărul astfel :

$$N = (3 + 3^2 + 3^3) + 3^3(3 + 3^2 + 3^3) + 3^6(3 + 3^2 + 3^3) + \ldots + 3^{1980}(3 + 3^2 + 3^3) + 3^{1983}(3 + 3^2 + 3^3) = (3 + 3^2 + 3^3)(1 + 3^3 + 3^6 + \ldots + 3^{1980} + 3^{1983}) = 39(1 + 3^3 + 3^6 + \ldots + 3^{1983}).$$

Constatăm că N se divide cu $39 = 3 \cdot 13$. Scriem numărul astfel :

$$N = (3 + 3^2) + 3^2(3 + 3^2) + \ldots + 3^4(3 + 3^2) + \ldots + 3^{1982}(3 + 3^2) + 3^{1984}(3 + 3^2) = (3 + 3^2) \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \ldots + 3^{1982} + 3^{1984}) = 12 \cdot (1 + 3^2 + 3^4 + \ldots + 3^{1984}).$$

Constatăm că N se divide cu 12, deci cu 4. Deoarece N se divide cu 4 şi 39 se divide cu $4 \cdot 39 = 156$.

**V.117.** Constatăm din tabloul următor, că ultima cifră se repetă din 4 în 4 adică $3^4$, $3^8$, $3^{12}$, $3^{16}$ au ultima cifră, cifra 1. Numărul dat se scrie $3^{4 \cdot 496 + 2} = (3^4)^{496} \cdot 3^2$. Ultima cifră a lui $3^4$ este 1. Tot cifra 1 va fi ultima cifră a numărului $(3^4)^{496}$. Ultima cifră a lui $3^2$ este 9, deci ultima cifră a numărului dat este 9.

| puterea, | $3^1$ | $3^2$ | $3^3$ | $3^4$ | $3^5$ | $3^6$ | $3^7$ | $3^8$ | $3^9$ | $3^{10}$ | $3^{11}$ | $3^{12}$ | $3^{13}$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ultima cifră | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | |

**V.118.** Avem ca ultima cifră la numerele $3^{1986}$, $4^{1987}$ şi $5^{1988}$ cifrele 9, 4 şi respectiv 5. Deci ultima cifră a lui $a$ va fi ultima cifră a numărului $9+4+5=18$ adică 8.

**V.119.** Scriem numărul dat astfel : $[n(n+5)]^3 \cdot n^2$. Întocmim un tabel în care scriem ultima cifră pe coloană, în fiecare caz :

| ultima cifră a numărului : | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| n | n + 5 | n(n+5) | $[n(n+5)]^3$ | $n^2$ | $[n(n+5)]^3 \cdot n^2$ |
| 1 | 6 | 6 | 6 | 1 | 6 |
| 2 | 7 | 4 | 4 | 4 | 6 |
| 3 | 8 | 4 | 4 | 9 | 6 |
| 4 | 9 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 6 | 1 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 7 | 2 | 4 | 4 | 9 | 6 |
| 8 | 3 | 4 | 4 | 4 | 6 |
| 9 | 4 | 6 | 6 | 1 | 6 |

Deci în orice caz, pentru orice $n$, ultima cifră a lui $n^5(n+3)$ este 6.

**V.120.** a) Avem $N = 3^{16} \cdot 7^{22} \cdot 2^4 \cdot 10^6$. Deci 6 zerouri.

b) $3^{16}$ are ultima cifră 1, $7^{22}$ are ultima cifră 9, iar $2^4$ ultima cifră 6. Rezultă că ultima cifră diferită de zero a lui N este 4.

**V.121.** Numărul $n$ are ultima cifră (a unităţilor), cifra 3. Nu este un pătrat pentru că cifra unităţilor unui pătrat al unui număr natural poate fi doar : 0, 1, 4, 9, 5 sau 6.

**V.122.** Ultima cifră a numărului $1\,986^{1986}$ este 6, a numărului $1\,987^{1987}$ este 3, iar a numărului $1\,988^{1988}$ este 6. Ultima cifră a lui N este ultima cifră a numărului $6+3+6=15$ deci N are ultima cifră 5 şi este divizibil cu 5.

**V.123.** Cifra unităţilor a numărului $9^{12}$ este 1, iar a lui $7^{12}$ este tot 1. Cifra unităţilor a numărului $A$ este zero, deci $A$ este divizibil cu 10.

**V.124.** Orice putere de exponent număr natural, a unui număr natural cu ultima cifră (cifra unităţilor) 3, are ultima cifră una din cifrele 1, 3, 9, 7. Acestea repetîndu-se din patru în patru, pentru exponenţi consecutivi. Cum exponentul 1 986 este multiplu de patru plus doi, înseamnă că ultima cifră a lui $1\,983^{1986}$ este cifra 9. Asemănător, observăm că ultima cifră a lui $1\,984^{1986}$ este 4, iar numărul $1\,985^{1986}$ are ultima cifră 5. Ultima cifră (cifra unităţilor) a numărului N se obţine adunînd ultimele cifre ale celor trei numere şi se găseşte că ea este zero, deci N este divizibil cu 10, deci $N^2$ este divizibil cu 100.

V.125. $a = (7\cdot 9)^n + 7^n\cdot 7\cdot 3^{2n}\cdot 3 - (3\cdot 7)^n\cdot 3^n\cdot 3^2 =$
$= 7^n\cdot 9^n + 7^n\cdot 3^{2n}\cdot 7\cdot 3 - 3^n\cdot 7^n\cdot 3^n\cdot 3^2 =$
$= 7^n\cdot 3^{2n} + 7^n\cdot 3^{2n}\cdot 7\cdot 3 - 3^{2n}\cdot 7^n\cdot 3^2 =$
$= 7^n\cdot 3^{2n}(1 + 7\cdot 3 - 9) = 7^n\cdot 3^{2n}\cdot 13$

V.126. $a = 5^{2n}\cdot 5^3\cdot 9^n\cdot 9^2 + 3^{2n}\cdot 3\cdot 25^n\cdot 25 =$
$= 5^{2n}\cdot 5^3\cdot 3^{2n}\cdot 3^4 + 3^{2n}\cdot 3\cdot 5^{2n}\cdot 5^2 =$
$= 5^{2n}\cdot 3^{2n}(5^3\cdot 3^4 + 3\cdot 5^2) =$
$= 5^{2n}\cdot 3^{2n}\cdot 3\cdot 5^2(5\cdot 3^3 + 1) =$
$= 5^{2n+2}\cdot 3^{2n+1}\cdot 136 = 5^{2n+2}\cdot 3^{2n+1}\cdot 8\cdot 17.$

V.127. $a = 15^n\cdot 15 + 3^n\cdot 3 + 5\cdot 3^n\cdot 3^2 =$
$= (3\cdot 5)^n\cdot 15 + 3^n\cdot 3 + 5\cdot 3^n\cdot 3^2 =$
$= 3^n(5^n\cdot 15 + 3 + 3^2\cdot 5) =$
$= 3^{n+1}\cdot(5^{n+1} + 1 + 15) = 3^{n+1}\cdot(5^{n+1} + 16).$
Pentru $n \geqslant 2$ avem $3^3$ factor, deci $a$ se divide cu 27.

V.128. Arătăm că $E$ trebuie să fie divizibil cu 2 și cu 9. $E$ este o sumă de doi termeni pari : 1 988 și $2^n\cdot 5^n$ care are pentru $n \neq 0$ factorul 2. Scriem $E$ astfel $E = (2\cdot 5)^n + 1\,988 = 10^n + 1\,988 = 1\,000\ldots 0 + 1988$ divizibil cu 9, deci $E$ se divide și cu 9.

V.129. a) Numărul $10^{1986}$ are 1 986 de zerouri. Dacă se face scăderea $10^{986} - 1$ obținem $p = 999\ldots 99$ care are 1 986 cifre de 9. Deci suma lor este $1\,986\cdot 9$.

b) Demonstrăm că numărul $k$ este divizibil cu 4. Avem că $10^n$ se scrie astfel : $100\ldots 000$ adică unu urmat de $n$ zerouri. Se observă că putem scrie $k = 1\,000\ldots 0044$ deci este divizibil cu 4. Constatăm că suma cifrelor lui $k$ este $1 + 0 + \ldots + 0 + 0 + 4 + 4 = 9$.

Rezultă că numărul $k$ este divizibil și cu 9 deci cu $4\cdot 9 = 36$

V.130. Numărul $a$ se scrie, succesiv :
$a = 2^{2n}\cdot 2\cdot 3^{2n}\cdot 5^n\cdot 5 + 4^n\cdot 3^{2n}\cdot 5^n =$
$= 3^{2n}\cdot 5^n(4^n\cdot 2\cdot 5 + 4^n) =$
$= 3^{2n}\cdot 5^n\cdot 4^n(2\cdot 5 + 1) = 11\cdot 9^n\cdot 4\cdot 4^{n-1}\cdot 5\cdot 5^{n-1} =$
$= 11\cdot 4\cdot 5\cdot 9\cdot 9^{n-1}\cdot 4^{n-1}\cdot 5^{n-1}.$

Numărul 1 980 se scrie $1\,980 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 11 = 11\cdot 4\cdot 5\cdot 9$. Se constată că $a$ are toți factorii lui 1 980, deci $a$ se divide cu 1 980.

V.131. Avem $\overline{xyz} - \overline{zyx} = 396$. Numărul ca să fie divizibil cu 4 trebuie să fie par, deci $z \in \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$, $z \neq 0$ căci nu ar mai fi de 3 cifre $\overline{zyx}$. Cazul $z = 2$ : $\overline{xy2} - \overline{2yx} = 396$ adică $x = 6$, deci numărul este de forma $\overline{6y2}$. Divizibile cu patru sînt 612 ; 632 ; 652 ; 672 ; 692. Cazul $z = 4$ ne conduce la $\overline{xy4} - \overline{4yx} = 396$, adică $x = 8$, deci numărul este de forma $\overline{8y4}$. Divizibile cu 4 sînt : 804 ; 824 ; 844 ; 864 ; 884. Celelalte cazuri, $z = 6$, $z = 8$ nu verifică condițiile problemei. Pentru divizibilitatea cu 9 avem pentru $z = 1$, $\overline{xy1} - \overline{1yx} = 396$, adică $x = 5$, deci numărul este de forma $\overline{5y1}$ și deci $y = 3$, care conduce la 531. Pentru $z = 2$, obținem 612 ; pentru $z = 3$ obținem 783 ; pentru $z = 4$ avem 864 ; pentru $z = 5$ avem 945. Dacă $z = 6$ obținem $x = 0$, diferit de 3 cifre etc.

Rezultă : 612 ; 632 ; 652 ; 672 ; 692 ; 804 ; 824 ; 844 ; 864 ; 884 ; 531 ; 945, 783.

**V.132.** a) Dacă $p \in \mathbf{N}$, avem $p^2 \in \mathbf{N}$, $3p^2 \in \mathbf{N}$ (1).

Dacă $k \in \mathbf{N}$, avem : $12k \in \mathbf{N}$. (2). Din (1) şi (2) obţinem că $3p^2 + 12k \in \mathbf{N}$, deci $A \in \mathbf{N}$.

b) Scriem $A = 3(p^2 + 4k)$. c) Deoarece 4 este divizorul lui 12 înseamnă că $4 \mid 12k$. Pentru ca 4 să-l dividă pe $A$ trebuie ca 4 să-l dividă şi pe $3p^2$, adică pe $p^2$, deci $p$ trebuie să fie număr natural par.

**V.133.** Dacă numărul e divizibil cu 30 atunci este divizibil şi cu 10; deci avem $\overline{abc0}$. Condiţia ultimă devine $c - b = a = 3$ sau $b - c = a = 3$, adică $\overline{3bc0}$ cu $c - b = 3$ sau $b - c = 3$, cazul $c - b = 3$, adică $c = 3 + b$. Pentru divizibilitatea cu 3 avem $b + c \in \{3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21 ; \ldots\} = A$, adică $b + 3 + b \in A$, adică $2b + 3 \in A$. Se găsesc : 3 030, 3 360, 3 690. Cazul $b - c = 3$, adică $b = 3 + c$. Pentru divizibilitatea cu 3 avem $b + c \in A$, adică $3 + c + c \in A$, adică $3 + 2c \in A$. Se găsesc 3 300, 3 630, 3 960.

**V.134.** $2\,772 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. Cel mai mic număr, cerut, este $7 \cdot 11$ şi vom avea $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2$.

**V.135.** Numărul dat se scrie succesiv : $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1\,000 + \overline{abc} = \overline{abc}(1\,000 + 1) = \overline{abc} \cdot 1\,001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Pentru ca numărul $x$ să aibă cel mai mic număr de divizori trebuie ca $\overline{abc}$ să fie prim.

**V.136.** Scriem numărul dat : $x = \overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10\,000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab}(10\,000 + 100 + 1) = \overline{ab} \cdot 10\,101 = \overline{ab} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$. Cel mai mic număr cu cel mai mic număr de divizori este dat de $\overline{ab}$ număr prim.

**V.137.** a) Singurul număr natural $n \neq 2$ care admite ca divizori pe 1, $n$ şi pe 2 este 4.

b) $n + 3 = n + 1 + 2$. Deci avem rezultatul de la punctul a), $n = 4$.

**V.138.** $a = [2^2 \cdot 5 \cdot (5^2)^{200} \cdot 2^{100} \cdot (2 \cdot 5)^3] : (2^{100} \cdot 5^{400} \cdot 5^3 \cdot 2) =$
$= (2^2 \cdot 5 \cdot 5^{400} \cdot 2^{100} \cdot 2^3 \cdot 5^3) : (2^{101} \cdot 5^{403}) =$
$= (2^{105} \cdot 3^{404}) : (2^{101} \cdot 5^{403}) = 2^4 \cdot 5 = 80$ ;

$b = 6 + 2 \cdot [(3 \cdot 25 - 4 \cdot 18 : 9 + 33) : 4] =$
$= 6 + 2 \cdot [(75 - 72 : 9 + 33) : 4] = 6 + 2 \cdot [(75 - 8 + 33) : 4] =$
$= 6 + 2 \cdot [100 : 4] = 6 + 2 \cdot 25 = 6 + 50 = 56 = 2^3 \cdot 7$.

Avem c.m.m.d.c. care este $2^3 = 8$ şi c.m.m.m.c. care este $2^4 \cdot 5 \cdot 7 = 560$.

**V.139.** Fie $a = 6a_1$, $b = 6b_1$ şi $c = 6c_1$ unde $a_1$, $b_1$, $c_1$ sînt numere naturale prime între ele.

Conform datelor problemei obţinem $6a_1 \cdot 6b_1 \cdot 6c_1 = 12\,096$ sau $a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 = 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$.

Avem :

| $a_1$ | $b_1$ | $c_1$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 28 |
| 1 | 4 | 14 |
| 1 | 8 | 7 |

deci numerele sînt :

| $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|
| 6 | 12 | 168 |
| 6 | 24 | 84 |
| 6 | 84 | 42 |

Mai căutați și alte triplete.

**V.140.** Deoarece cel mai mare divizor comun al celor două numere, pe care le notăm cu $a$ și $b$, este 5 putem scrie : $a = 5 \cdot a_1$ și $b = 5 \cdot b_1$, unde $a_1$ și $b_1$ sînt numere naturale prime între ele.

Conform textului avem : $a + b = 40$, adică $5a_1 + 5b_1 = 40$, care se mai scrie $5(a_1 + b_1) = 40$ sau $a_1 + b_1 = 8$.

Această relație permite să găsim $a_1$ și $b_1$ numere naturale și prime între ele : $a_1 = 1$ și $b_1 = 7$, sau $a_1 = 3$ și $b_1 = 5$. Deci numerele cerute sînt : $a = 5$ și $b = 35$ sau $a = 15$ și $b = 25$.

**V.141.** Aplicăm teorema împărțirii cu rest. Notăm cu $a$ numărul la care se împart cele trei numere iar cu $b$, $c$ și respectiv $d$, cîturile.

Avem : $1\,234 = ab + 13$ ; $6\,532 = ac + 7$ ; $1\,817 = ad + 2$.

Aceste relații se mai scriu : $1\,243 - 13 = ab$ ; $6\,532 - 7 = ac$ ; $1\,817 - 2 = ad$, adică : $1\,230 = ab$ ; $6\,525 = ac$ ; $1\,815 = ad$. Constatăm că $a$ este un divizor comun al numerelor 1 230, 6 525 și 1 815, mai mare decît 13 care este restul cel mai mare dintre cele date.

Calculăm cel mai mare divizor comun al acestor numere. Acesta este 15, care este și împărțitorul cerut.

**V.142.** Avem $1\,944 = a \cdot b$ ; $1\,986 = a \cdot c + 6$ și $2\,000 = a \cdot d + 2$.

Acestea se mai scriu $1\,944 = a \cdot b$, $1\,986 - 6 = a \cdot c$ și $2\,000 - 2 = a \cdot d$. Înseamnă că $a$ este un divizor comun al numerelor 1 944, 1 980 și 1 998. Cel mai mare divizor comun al lor este 18. Deoarece $a$ este împărțitor trebuie să avem $a > 6$ (din teorema împărțirii cu rest). Deci $a > 6$ este un divizor al lui 18 adică $a = 9$ sau $a = 18$.

**V.143.** Folosind teorema împărțirii cu rest, rezultă că numărul la care au fost împărțite trebuie să fie mai mare ca 42. Acest număr este un divizor comun al numerelor $2\,435 - 35$ ; $342 - 42$ ; $4\,527 - 27$ adică al numerelor 2 400 ; 300 ; 4 500, deci un divizor al celui mai mare divizor comun al lor.

C.m.m.d.c. = 300. Soluția : {300, 150, 100, 75, 60, 50}.

**V.144.** Notăm $\overline{abc}$ numărul de pionieri din unitate și cu $r$ restul. Conform teoremei împărțirii cu rest avem $\overline{abc} = 20 \cdot n_1 + r$, $\overline{abc} = 50 \cdot n_2 + r$, și $\overline{abc} = 70 \cdot n_3 + r$ unde $n_1$, $n_2$, $n_3$ reprezintă numărul de rînduri în fiecare caz iar $r < 20$. Cele trei egalități se mai scriu : $\overline{abc} - r = 20 \cdot n_1$, $\overline{abc} - r = 50 \cdot n_2$ și $\overline{abc} - r = 70 \cdot n_3$. Acestea comunică faptul că numărul $\overline{abc} - r$ este multiplu comun de 20, 50, 70 adică multiplu de cel mai mic multiplu comun al numerelor 20, 50 și 70 care este 700. $\overline{abc}$ este mai mare decît 700 și mai mic ca 1 000. Deci $\overline{abc} = 700 + r$ cu $r < 20$ și $r > 0$.

**V.145.** Numărul este un multiplu comun de 2, 3, 4, 5, 6 plus unu şi multiplu de 7. Cel mai mic multiplu comun de 2, 3, 4, 5, 6 este 60. Numărul căutat este $60 \cdot 5 + 1 = 301$.

**V.146.** Numărul de elevi este multiplu comun de 2, 3, 4, 5, plus unu şi multiplu de 7 adică $60 \cdot 5 + 1 = 301$, care este mai mic ca 500.

**V.147.** Problema se poate enunţa parţial astfel: numărul este multiplu de 7 plus 6 şi multiplu de 6 plus 5 şi multiplu de 5 plus 4 şi multiplu de 4 plus 3. Aceasta, mai comod, se poate enunţa şi astfel: numărul este multiplu de 7 minus 1, multiplu de 6 minus 1, multiplu de 5 minus 1 şi multiplu de 4 minus 1. Deci din multiplu comun de 7, 6, 5 şi 4 scadem 1. Numărul este $420 - 1 = 419$.

**V.148.** Timpul de întîlnire este reprezentat, în ore, printr-un număr care este multiplu comun al numerelor 5 şi 6. Deoarece se cere prima întîlnire, aceasta se realizează după cel mai mic multiplu comun al numerelor 5 şi 6, adică 30.

**V.149.** Din b) avem că numărul $\overline{abc}$ este număr par, deci avem situaţia că $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Condiţia a) ne dă că $b \in \{1, 5, 9, 13, 17\}$ din care numai 1, 5, 9 reprezintă cifre. Avem, respectiv: $\overline{a10}$, $\overline{a52}$, $\overline{a94}$. Din acestea numai $\overline{a52}$ este divizibil cu 4 (ca să fie şi cu 12). Pentru divizibilitatea cu 3 trebuie să avem $a + 5 + 2$ multiplu de 3. În cazul nostru sînt posibile $a + 7 = 9$, $a + 7 = 12$, $a + 7 = 15$ adică $a = 2$, $a = 5$, $a = 8$. Din acestea verifică c) numai $a = 2$ şi $a = 5$. În concluzie numerele sînt 252 şi 552.

**V.150.** $a = 2 - 1 = 1$, nu este număr prim; $b = 6 - 1 = 5$, este număr prim; $c = 30 - 1 = 29$, este număr prim; $d = 30 \cdot 7 - 1 = 210 - 1 = 209 = 11 \cdot 19$ nu este număr prim.

**V.151.** Fie $a$, $b$, $c$ cifrele numărului cerut, indiferent de ordine. Avem $a \cdot b \cdot c = 14$. Cum $a$, $b$, $c$ sînt cifre înseamnă că ele sînt reprezentate de divizorii naturali, de o singură cifră, ai lui 14, adică 1, 2, 7. Avem astfel situaţiile 127, 172, 217, 271, 712, 721. Din aceste numere sînt prime numai: 127 şi 271.

**V.152.** Afirmaţia este falsă, căci pentru $n = 10$, avem $10(10 + 3) + 13 = 10 \cdot 13 + 13 = 13(10 + 1) = 13 \cdot 11$ care numai este număr prim. Şi pentru $n = 9$ este falsă.

**V.153.**

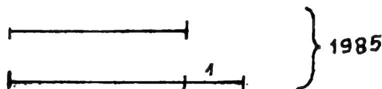



*Fig. V.153.*

Numărul cel mic este $(1985 - 1) : 2 = 992$ iar cel mai mare este 993. Se verifică faptul că sînt neprime.

**V.154.** Numărul prim trebuie să fie par care adunat cu al doilea, impar, să dea număr natural impar, 24 735. Deci 2 şi 24 733.

**V.155.** Numărul prim trebuie să fie par. Singurul număr prim şi par este doi. Deci numerele sînt 1 002 şi 2.

**V.156.** Vom arăta că singurul număr natural prim de două cifre identice este 11. Presupunem (prin absurd) că ar exista numărul $\overline{aa}$ prim. Acest număr se scrie : $\overline{aa} = 10a + a = 11a$. El este prim numai dacă $a = 1$. Deci numerele cerute sînt 11 şi 2 425 ; b) $2\,425 = 5^2 \cdot 97$ ; c) $M = \{5, 97\}$. $d = 97$ este număr prim pentru că împărţind pe 97 la fiecare număr prim mai mic decît 11, nu obţinem restul zero.

**V.157.** A doua relaţie se mai scrie $a = 6 + b$. Cu aceasta, prima relaţie devine succesiv : $6 + b + b - c = 1\,986$, $6 + 2b - c = 1\,986$, $2b - c = 1\,986 - 6$, $2b - c = 1\,980$, $2b = 1\,980 + c$. Constatăm că $2b$ este un număr par deci şi $1\,980 + c$ este un număr par. Cum 1 980 este un număr par rezultă că şi $c$ trebuie să fie număr par. Din problemă, $c$ este număr prim. Singurul număr prim par este 2, deci $c = 2$. Cu acesta, găsim că $2b = 1\,980 + 2$ adică $b = 991$ care este număr prim. (Verificaţi !), iar $a = 6 + 991 = 997$.

**V.158.** Numărul 82 este par deci $a + 10b + 12c$ este par. Deoarece $10b$ şi $12c$ sînt numere pare rezultă că şi $a$ este par. Cum trebuie să fie şi prim, obţinem că $a = 2$. Deci $2 + (10b + 12c) = 82$, adică $10\,b + 12c = 80$. Observăm că $10b$ este divizibil cu 5. Dar şi 80 adică $10b + 12c$ este divizibil cu 5 rezultă că şi $12c$ este divizibil cu 5. Cum $12c < 80$ avem că $c = 5$. Deci $10b + 12 \cdot 5 = 80$, adică $10b = 80 - 60$, $10b = 20$. $b = 2$. Răspunsul este $a = 2$, $b = 2$, $c = 5$.

**V.159.** Se ştie că orice număr prim, diferit de numărul 2, este un număr impar. Suma de un număr par de numere impare este un număr par deci nu poate fi prim. Înseamnă că printre cele 6 numere prime (număr par) trebuie să fie un număr par. Numerele sînt 2, 3, 5, 7, 11 şi 13. Suma lor este 41 care este număr prim. Altă combinaţie de 6 numere prime care să-l conţină pe 2 nu îndeplineşte condiţia că să fie şi consecutive.

**V.160.** Conform datelor problemei avem egalităţile : $(x + 1) \cdot y \cdot z = xyz + 30$ şi $x \cdot (y - 1) \cdot z = xyz - 20$.

Atît din scrierea $(x + 1)\,yz$ cît şi din scrierea $x\,(y - 1)\,z$ constatăm că $z$ este divizor comun al numerelor $(x + 1)\,yz$ şi $x\,(y - 1)\,z$ adică al egalelor lor $xyz + 30$ şi respectiv $xyz - 20$. Aceasta înseamnă că $z$ fiind divizor al sumei $xyz + 30$ şi al termenului $xyz$, este divizor şi al termenului 30. Asemănător, găsim că $z$ este divizor şi al lui 20. Deci cum din problema $z$ este prim, obţinem că $z$ este divizor comun, prim, al numerelor 30 şi 20. Rezultă că $z \in \{2, 5\}$. Cazul $z = 2$ ne dă o formă mai comodă pentru cele două relaţii : $(x + 1)\,y = xy + 15$ şi $x\,(y - 1) = xy - 10$. Prima din aceste relaţii devine $xy + y = xy + 15$ din care constatăm că $y = 15$ iar $x$ este orice număr natural. Cu $y = 15$, a doua relaţie devine $x \cdot 14 = x \cdot 15 - 10$. De aici observăm că $x$ este divizor al lui 10. Dintre divizorii lui 10 verifică egalitatea numai $x = 10$. Deci o soluţie a problemei este : $x = 10$, $y = 15$ şi $z = 2$. Cazul $z = 5$, analizat asemănător ca mai sus ne dă $x = 4$ şi $y = 6$.

**V.161.** Numărul prim cu cifrele egale în condiţiile problemei nu poate avea trei cifre, căci dacă ar fi aşa el ar fi de forma $\overline{aaa} = 100a + 10a + a = a\cdot(100 + 10 + 1) = a\cdot 111 = a\cdot 3\cdot 37$ şi nu ar mai fi prim. El este de două cifre, de forma $\overline{aa} = 10a + a = 11\cdot a$. Poate fi prim numai dacă $a = 1$, deci numărul este 11. Suma celorlalte patru numere prime, diferite, este $226 - 11 = 215$. Două numere prime diferite unul răsturnatul celuilalt, de două cifre, sînt perechile : 13 cu 31 ; 17 cu 71 ; 37 cu 73 ; 79 cu 97 care adunate dau respectiv 44, 88, 110, 176. Scăzînd suma acestor două numere obţinem suma ultimelor două numere care este respectiv 171, 127, 105, 39. Nu există două numere prime care adunate să dea în sumă 171 sau 127, deoarece orice număr prim cu excepţia lui 2 este un număr impar ; adunînd două numere prime impare obţinem un număr par şi deci nici 171 şi nici 127. Se exclude şi cazul lui 2 căci $171 - 2 = 169$ sau $127 - 2 = 125$ nu sînt numere prime. Rămîne să se analizeze, la fel situaţia cînd avem 105 sau 39 la care obţinem respectiv 2 şi 103 sau 2 şi 37. Deci avem două soluţii : $\{11, 37, 73, 2, 103\}$ sau $\{11, 97, 79, 2, 37\}$.

**V.162.** Pentru a fi prime între ele trebuie să nu aibă divizor comun. Divizorii lui 12 sînt : 1, 2, 3, 4, 6, 12. Rezultă că $\overline{25x}$ să nu fie *număr* par şi divizibil cu 3. Numerele impare de forma respectivă sînt : 251, 253, 255, 257, 259. Din acestea nedivizibile cu 3 sînt 251, 253, 257, 259. Aşadar $x \in \{1, 3, 7, 9\}$.

**V.163.** Avem $2\,310 = 2\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 11$. Deci numărul $\overline{179x}$ nu trebuie să fie par. Avem unul din următoarele numere : 1 791, 1 793, 1 795, 1 797, 1 799. Excludem pe cele divizibile cu 3. Rămîn 1 793, 1 975 şi 1 799. Excludem pe cel divizibil cu 5. Rămîn 1 973 şi 1 799. Amîndouă sînt divizibile cu 7. Deci nu există $x$ astfel încît $\overline{179x}$ şi 2 310 să fie prime între ele.

**V.164.** Deoarece $2r = p + q$ şi $p + q + r = 21$ avem $3r = 21$ deci $r = 7$. Cu acesta $p + q = 14$. Din problemă $q = 6p$ iar precedenta egalitate ne dă $7p = 14$, adică $p = 2$, şi deci $q = 12$. Calculăm acum

$$t = \{20\cdot 23 - 2\,[200 + (2^7\cdot 5^2\cdot 3^2) : (3^2\cdot 2^6\cdot 5)]\} : 10 = \{460 - 2\,[200 + 10]\} : 10 = \{460 - 2\cdot 210\} : 10 = \{460 - 420\} : 10 = 4.$$

Pentru calculul lui $A$ şi $B$ avem exerciţiul V.105. rezolvat la pag. 52 : $A = \{2\,130,\ 2\,430,\ 2\,730,\ 2\,235,\ 2\,535,\ 2\,835\}$. $B = \{2\,430,\ 2\,232,\ 2\,034,\ 2\,934,\ 2\,736,\ 2\,538\}$.

Apoi $C = \{2, 12, 7, 10\}$, $D = \{1, 2, 4, 7\}$. $E = \{2, 12, 7, 10, 2\,130, 2\,430, 2\,730, 2\,235, 2\,535, 2\,835\}$. $F = \{2\,430, 2\,232, 2\,034, 2\,934, 2\,736; 2\,538, 1, 2, 4, 7\}$. $E \cap F = \{2, 7, 2\,430\}$. $E \cap F - (E \cup F) = \emptyset$. $E \cup F - (F - E) = E$.

**V.165.** Notăm cu $x$, $y$, $z$ cele trei numere şi facem alegerea $x < y < z$.

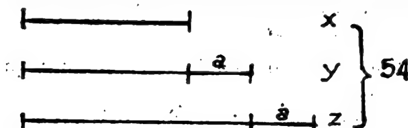



*Fig. V.165.*

Faptul că unul din ele, în cazul nostru $y$, este media aritmetică a celorlalte îl putem reprezenta astfel :

Observăm că $y = 54 : 3 = 18$. Rezultă că $x + z = 54 - 18 = 36$ şi că $x$ şi $z$ sînt divizibile cu 6. Avem $x = 6$ şi $z = 30$ sau $x = 12$ şi $z = 24$.

**V.166.** Numerele naturale de trei cifre, $a$, $b$ şi $c$ sînt : $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cba}$, $\overline{cab}$. Calculăm suma :

$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cab} + \overline{cba} = 100a + 10b + c + 100a + 10c + b + 100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b + 100c + 10b + a = 222a + 222b + 222c = 222(a + b + c)$$

Rezultă că suma cerută este divizibilă cu $a + b + c$.

**V.167.** Vezi problema precedentă.

**V.168.** Fie $a$, $a + 1$, $a + 2$ cifrele sale. Numărul poate fi :

$$\overline{a(a+1)(a+2)} = 100a + 10(a + 1) + a + 2 = 100a + 10a + 10 + a + 2 = 111a + 12 = 3(37a + 4),$$

deci se divide cu 3. Numărul mai poate fi scris cu cifre consecutive şi astfel :

$$\overline{(a+2)(a+1)a} = 100(a + 2) + 10(a + 1) + a = 100a + 200 + 10a + 10 + a = 111a + 210 = 3(37a + 70),$$

deci se divide cu 3.

**V.169.** Scriem numărul cerut astfel : $x = 10 \cdot n + u$, $n \in \mathbf{N}$ iar $u$ este cifra unităţilor lui $x$. Avem conform textului : $10 \cdot n + u = 7u$ adică $10 \cdot n = 7u - u$ adică $10n = 6u$.

Aceasta se mai scrie $5n = 3u$. Se constată că $u$ trebuie să fie divizibil cu 5. Cum $u$ joacă rol de cifră avem $u \in \{0, 5\}$. Pentru $u = 0$ avem $n = 0$ deci $x = 0$.

Pentru $u = 5$ avem $5n = 15$, $n = 3$ deci $x = 35$.

**V.170.** Se observă că $x \mid (5 + x)$ şi că $x \mid x$ ; rezultă că $x \mid 5$. Asemănător, $x \mid 12$ şi deasemenea $x \mid 15$. Din $x \mid 5$ avem că $x \in \{1, 5\}$. Din $x \mid 12$ avem că $x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Din $x \mid 15$ avem că $x \in \{1, 3, 5, 15\}$. Găsim $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15\}$.

**V.171.** Din problemă, $m \in \mathbf{N}$ şi $n \in \mathbf{N}$ rezultă că $m^2 \in \mathbf{N}$ şi $n + 1 \in \mathbf{N}$. Avem deci, $m^2$ şi $n + 1$ divizori naturali ai lui $800 = 2^5 \cdot 5^2$. Pentru $m^2$ avem : 1, $2^2$, $2^4$, $5^2$, $2^2 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 5^2$ iar pentru $n + 1$ avem respectiv : $2^5 \cdot 5^2$, $2^3 \cdot 5^2$, $2 \cdot 5^2$, $2^5$, $2^3$, 2 adică perechile $(m, n)$ : (1, 799), (2, 199), (4, 49), (5, 31), (10, 7), (20, 1).

**V.172.** Avem : $a^b \cdot c - 1 = 12$, adică $a^b \cdot c = 13$. Constatăm că c este divizor natural al lui 13. Deci avem $c = 1$ sau $c = 13$. Cazul, $c = 1$, $a^b = 13$, deci $a = 13$ şi $b = 1$. Cazul, $c = 13$ avem $a^b = 1$. În această situaţie avem $a = 1$ şi $b \in \mathbf{N}$ sau $a \in \mathbf{N}^*$ şi $b = 1$.

**V.173.** Fie $x$, $y$, $z$ cele trei numere. Conform textului problemei, $y = 3x$ şi $z = 2 \cdot y = 2 \cdot 3x = 6x$.

$P = x \cdot y \cdot z = x \cdot 3x \cdot 6x = 18x^3$ iar $S = x + y + z = x + 3x + 6x = 10x$.

Ştim, din problemă, că $S$ divide pe $P$, adică $10x$ divide pe $18x^3$. Aceasta înseamnă că divizorii lui 10 adică 2 şi 5 divid pe $18x^3$. Obligatoriu trebuie ca 5 să dividă pe $x^3$ care este număr natural. Deci $5 \mid x$, ceeace înseamnă că $x$ este multiplu de 5, diferit de zero. Rezultă că $S = 10x$ este multiplu de 50.

**V.174.** Pentru ca fracţiile să fie echivalente trebuie să avem $\frac{2}{a} = \frac{5}{3}$ adică $2 \cdot 3 = 5 \cdot a$. Nu există $a \in \mathbf{N}$, astfel încît $5 \cdot a = 6$.

**V.175.** Avem : $15 < 2 \cdot n$, $12n < 105$, $n \in \mathbf{N}$.

Inecuaţia $12n < 105$, $n \in \mathbf{N}$ are ca soluţii $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8\}$. Din acestea, verifică inecuaţia $15 < 2 \cdot n$, doar pentru $n = 8$.

**V.176.** Condiţia impusă se mai scrie : $3n^2 < 40$ şi $20 < 3n^2$. Din prima inegalitate avem numerele naturale 1, 2, 3. A doua inegalitate este verificată doar de $n = 3$.

**V.177.** a) $\frac{23 \cdot 10^6 + 23 \cdot 10^4 + 23 \cdot 10^2 + 23}{32 \cdot 10^6 + 32 \cdot 10^4 + 32 \cdot 10^2 + 32} = \frac{23 \cdot (10^6 + 10^4 + 10^2 + 1)}{32 \cdot (10^6 + 10^4 + 10^2 + 1)} = \frac{23}{32}$

b) $\frac{3(1 + 2 + 3 + \ldots + 51)}{4(1 + 2 + 3 + \ldots + 51)} = \frac{3}{4}$.

**V.178.**

$$\frac{6 + 8 - 3}{3 \cdot 4} - \frac{8 + 15 - 10}{5 \cdot 4} = \frac{11}{3 \cdot 4} - \frac{13}{5 \cdot 4} = \frac{55 - 39}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{4}{15}.$$

**V.179.**

$$6 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{11}{72} \cdot \frac{6}{7}\right] = 6 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{11 \cdot 6^{(6}}{72 \cdot 7}\right] = 6 \cdot \left[\frac{1}{4} + \frac{11}{12 \cdot 7}\right] = 6 \cdot \frac{21 + 11}{12 \cdot 7} =$$

$$= 6 \cdot \frac{32^{(4}}{12 \cdot 7} = 6 \cdot \frac{8}{3 \cdot 7} = \frac{6 \cdot 8^{(3}}{3 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 8}{7} = \frac{16}{7}.$$

**V.180.** Avem după ce efectuăm adunările şi scăderile :

$$\frac{15}{24} \cdot x = \frac{5}{8} \cdot y \text{ sau } \frac{5}{8} x = \frac{5}{8} \cdot y.$$

Aceasta înseamnă că $x = y$. Împreună cu propoziţia b) rezultă că găsim

$$x = y = \frac{1}{2}.$$

**V.181.**

$$\frac{60 - 30 + 20 - 15 + 12}{60} = x \cdot \frac{240 - 60 - 40 + 24 + 15}{120};$$

$$\frac{47}{60} = \frac{179}{120} \cdot x \text{ ; } x = \frac{47}{60} : \frac{179}{120} \text{ ; } x = \frac{47}{60} \cdot \frac{120}{179} \text{ ; } x = \frac{94}{179}.$$

V.182.

$$3\cdot\{2\cdot9+25:1+69\cdot[16\cdot3-6^{32}:2^{30}:3^{30}+75]\}=$$

$$=3\cdot\left\{18+25+69\cdot\left[48-(2\cdot3)^{32}\cdot\frac{1}{2^{30}}\cdot\frac{1}{3^{30}}+75\right]\right\}=$$

$$=3\cdot\left\{43+69\cdot\left[48-\frac{2^{32}\cdot3^{32}}{2^{30}\cdot3^{30}}+75\right]\right\}=$$

$$=3\cdot\{43+69\cdot[48-36+75]\}=3\cdot\{43+69\cdot87\}=18\,138.$$

V.183.

$$\frac{47\cdot3}{8}-\left[\left(26\frac{1}{3}-\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{12}{5}\right]:\frac{22}{35}=\frac{9}{2}:\frac{4}{11};$$

$$\left(26\frac{1}{3}-\frac{3}{4}x\right)\cdot\frac{12}{5}=\frac{141-99}{8}\cdot\frac{22}{35};\quad 26\frac{1}{3}-\frac{3}{4}x=\frac{42}{8}\cdot\frac{22}{35}:\frac{12}{5};$$

$$\frac{3}{4}x=26\frac{1}{3}-\frac{33\cdot5}{10\cdot12};\quad x=\frac{599}{18}.$$

V.184. Vom căuta numerele naturale de forma $\overline{9y7x}$ care nu sînt divizibile cu divizori primi ai numărului 24. Aceşti divizori sînt 2 şi 3. Numerele de forma $\overline{9y7x}$ care nu sînt divizibile cu 2 au forma $\overline{9y71}$, $\overline{9y73}$, $\overline{9y75}$, $\overline{9y77}$ şi $\overline{9y79}$. Pentru ca aceste numere să nu fie divizibile cu 3 trebuie ca să nu fie divizibile cu 3 respectiv următoarele numere : $9+7+1+y$, $19+y$, $21+y$, $23+y$ şi $25+y$.

Avem respectiv : $y\in\{0;2;3;5;6;8;9\}$, $y\in\{0;1;3;4;6:7;9\}$, $y\in\{1;2;4;5;7;8\}$, $y\in\{0;2;3;5;6;8;9\}$ şi $y\in\{0;1;3;4;6;7;9\}$. În concluzie numărătorii fracţiilor ireductibile cerute sînt : 9 071, 9 271, 9 371, 9 571, 9 671, 9 871, 9 971, 9 073, 9 173, 9 373, 9 473, 9 673, 9 773, 9 973, 9 175, 9 275, 9 475, 9 575, 9 775, 9 875, 9 077, 9 277, 9 377, 9 577, 9 677, 9 877, 9 977, 9 079, 9 179, 9 379, 9 479, 9 679, 9 779, 9 979.

V.185. a) Scriem $\overline{xyzxyz}=\overline{xyz}\cdot1000+\overline{xyz}=\overline{xyz}+(1000+1)=1\,001\cdot\overline{xyz}=7\cdot11\cdot13\ \overline{xyz}$. Asemănător, $\overline{xy0xy}=\overline{xy}\cdot1\,000+\overline{xy}=\overline{xy}\cdot1\,001=7\cdot11\cdot13\cdot\overline{xy}$.

b) Se observă că :

$$\frac{\overline{xy0xy}}{\overline{xyzxyz}}=\frac{(\overline{xy}\cdot1001)}{(\overline{xyz}\cdot1001)}=\frac{\overline{xy}}{\overline{xyz}}$$

c) Scriem fracţia astfel : $\dfrac{\overline{xy}}{(\overline{xy}\cdot10+z)}$. Deoarece $\overline{xy}$ este prim, înseamnă că fracţia se poate simplifica numai cu $\overline{xy}$, deci $z$ trebuie să fie multiplu de $\overline{xy}$. Aceasta este posibil cînd $z=0$. Deci fracţia este ireductibilă pentru $z\in\{1,2,\ldots,9\}$.

d) Folosim precedenta scriere şi rezultă că $z$ trebuie să fie divizibil cu 3. Deci $z \in \{0, 3, 6, 9\}$.

**V.186.** Avem de găsit $x \in \mathbf{N}$ astfel încît $\frac{1}{6} < \frac{x}{112} < \frac{1}{5}$. Aceasta conduce la $112 < 6x$ şi $5x < 112$, adică $x \in \{19, 20, 21, 22\}$. Deci fracţiile sînt: $\frac{19}{112}, \frac{20}{112}, \frac{21}{112}, \frac{22}{112}$. Dintre acestea ireductibilă este numai $\frac{19}{112}$.

**V.187.** $10^n$ este un număr care are o singură cifră 1 şi restul cifrelor cifra zero (sau numai o singură cifră 1 cînd $n = 0$). Deci suma cifrelor $10^n + 8$ este $1 + 0 + \ldots + 0 + 8 = 9$.

Numărul $10^n + 8$ este un număr divizibil cu 9, deci $x \in \mathbf{N}$.

**V.188.** a) Fie $n$ număr natural par, adică $n = 2k$. Avem $n(n+1) = 2k(2k+1)$. Deoarece unul din factori este 2 produsul este număr par. Fie $n$ număr natural impar, adică $n = 2k + 1$. Avem $(2k+1)(2k+1+1) = (2k+1)\cdot(2k+2) = (2k+1)\cdot 2\cdot(k+1)$, deci număr par.

b) Scriem fracţia astfel: $\frac{n + (n+1)}{n\cdot(n+1)}$. Fie $d$ un divizor al lui $n$ de la numitor. Adunarea de la numărător nu are pe $d$ ca divizor, căci dacă $d$ este divizorul lui $n$, nu este divizor şi pentru $n + 1$. Deci fracţia nu se simplifică cu nici un divizor al lui $n$. Fie $d_1$ divizor al lui $n + 1$ de la numitor. Adunarea de la numărător nu are pe $d_1$ ca divizor, căci dacă $d_1$ este divizorul lui $n + 1$, nu este divizor şi pentru $n$. Deci fracţia nu se simplifică.

**V.189.** Figurăm informaţia despre primul număr:




*Fig. V.189.a.*

Observăm că primul număr se găseşte astfel: $72 : 4 = 18$. Calculăm suma dintre al doilea şi al treilea: $72 - 18 = 54$.

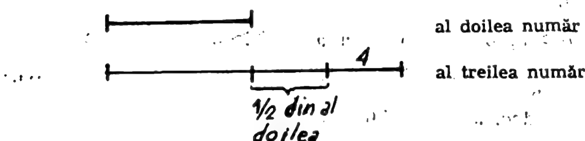



*Fig. V.189.b.*

Jumătate din al doilea este $(54 - 4) : 5 = 10$. Deci al doilea număr este 20 iar al treilea 34.

**V.190.**

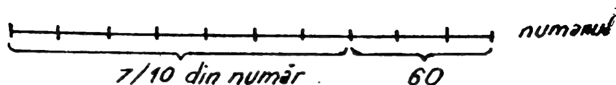



*Fig. V.190.*

Constatăm că $\frac{1}{10}$ din număr reprezintă $60:3=20$. Deci numărul este $20\cdot10=200$.

**V.191.** Datele problemei le figurăm astfel:

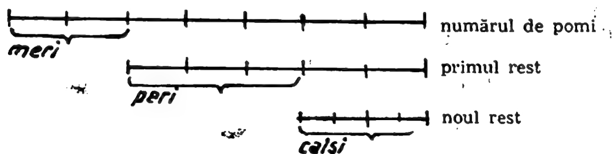



*Fig. V.191.*

Se constată că $\frac{1}{5}$ din primul rest reprezintă aceeaşi situaţie cît $\frac{1}{7}$ din numărul de pomi, iar $\frac{1}{4}$ din noul rest cît $\frac{1}{14}$ din numărul de pomi. Deci meri sînt $\frac{4}{14}$ din numărul de pomi, iar caişi $\frac{3}{14}$ din numărul de pomi. Deci $\frac{1}{14}$ din numărul de pomi reprezintă diferenţa de 337. Aşadar sînt $337\cdot14=4\,718$ pomi fructiferi.

**V.192.** a) Cazul $0<x<1$: avem $x=\frac{a}{b}$ unde $a<b$. $x^2=\frac{a^2}{b^2}$. Calculăm $x-x^2=\frac{a}{b}-\frac{a^2}{b^2}=\frac{ab-a^2}{b^2}=\frac{a(b-a)}{b^2}$.

Deoarece $b>a$, $b-a>0$ deci $x-x^2>0$ şi deci $x>x^2$. Cazul $x>1$: avem $x=\frac{a}{b}$ unde $a>b$. Calculăm $x-x^2=\frac{a(b-a)}{b^2}$. Deoarece $b<a$, $b-a<0$, deci $x-x^2<0$ şi deci $x<x^2$.

b) Cazul $0<x<1$, $x=\frac{a}{b}$, $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$, $a<b$. Calculăm $x-\frac{1}{x}=$ $=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}$.

Deoarece $a < b$, $a^2 < b^2$, $a^2 - b^2 < 0$. Rezultă că $x - \frac{1}{x} < 0$. $x < \frac{1}{x}$. Cazul $x > 1, a > b$. Calculăm $x - \frac{1}{x} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$.

Rezultă că $x - \frac{1}{x} > 0$ şi deci $x > \frac{1}{x}$.

(Se consideră $a \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{b} \in \mathbf{N}^*$).

**V.193.** Notăm numărul cerut cu $\frac{a}{b}$. Cîturile respective sînt $\frac{10}{9} : \frac{a}{b}$ şi $\frac{8}{7} : \frac{a}{b}$. Pentru a fi numere naturale consecutive trebuie să avem succesiv:

$$\frac{8}{7} : \frac{a}{b} - \frac{10}{9} : \frac{a}{b} = 1\ ;\ \frac{8}{7} \cdot \frac{b}{a} - \frac{10}{9} \cdot \frac{b}{a} = 1\ ;\ \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{8}{7} - \frac{10}{9}\right) = 1\ ;$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{72 - 70}{63} = 1\ ;\ \frac{b}{a} \cdot \frac{2}{63} = 1\ ;\ \frac{b}{a} = \frac{63}{2}\ ;\ \frac{a}{b} = \frac{2}{63}.$$

**V.194.** Suma celor 50 de numere este $38 \cdot 50 = 1\,900$. Se „înlătură" din sumă $45 + 55 = 100$. Rămîn 48 de numere a căror sumă este $1\,900 - 100 = 1\,800$. Deci media aritmetică a celor 48 de numere rămase este $1\,800 : 48 = 37{,}5$.

**V.195.** a) Cel mai mare divizor comun al numerelor 60 şi 88 este 4.

Distanţa între doi stîlpi consecutivi este un divizor natural al lui 4 şi deci se pot fixa stîlpii din metru în metru, din 2 în 2 metri sau din 4 în 4 metri. Sînt necesari pentru fiecare situaţie : $296 : 1 = 296$ (stîlpi), $296 : 2 = 148$ (stîlpi), respectiv $296 : 4 = 74$ (stîlpi).

b) Sînt necesari minim $296 \text{ m} \cdot 6 = 1\,776$ m sîrmă care costă 1 332 lei.

**V.196.** Metoda I




*Fig. V.196.*

Dacă se măreşte lungimea lui $D$ cu 3 cm se obţine un dreptunghi cu dimensiunile de 18 cm şi 3 cm, deci cu aria de 54 cm$^2$. Rezultă că aria dreptunghiului $D$ este $1\,260 \text{ cm}^2 - 54 \text{ cm}^2 = 1\,206 \text{ cm}^2$. Lungimea lui $D$ este de $1\,206 \text{ cm}^2 : 18 \text{ cm} = 67$ cm.

Metoda a II-a

Notăm cu $x$ măsura lungimii lui $D$. Lungimea noului dreptunghi este $x + 3$. Avem ecuaţia : $18 \cdot (x + 3) = 1\,260$. Rezolvînd succesiv avem : $x + 3 = 1\,260 : 18$ ; $x + 3 = 70$ ; $x = 70 - 3$ ; $x = 67$.

**V.197.** Perimetrul dreptunghiului care se poate forma este de 1 dm$\cdot$4 + + 2 dm$\cdot$5 + 4 dm$\cdot$7 = 42 dm. Semiperimetrul este de 21 dm. Notăm cu $x$ şi $y$ măsura lăţimii, respectiv a lungimii dreptunghiului. Trebuie să avem $x + y = 21$, $x$ şi $y$ fiind numere naturale, multipli ai numerelor 1, 2, 4 sau ai combinaţiilor de aceste numere. În cazul nostru răspunsul este : se poate forma un dreptunghi. Exemplu : 1 dm$\cdot$1 pe o lăţime, 4 dm$\cdot$5 pe o lungime, 1dm$\cdot$1 pe lăţimea rămasă, restul pe lungimea rămasă. Alt exemplu : 2dm$\cdot$1 pe o lăţime, 4 dm$\cdot$4 şi 1 dm$\cdot$3 pe o lungime, 2 dm$\cdot$1 pe lăţimea rămasă şi restul pe lungimea rămasă. Mai găsiţi şi alte exemple.

**V.198.** Semiperimetrul este 60 hm. Notăm cu $x$ lăţimea. Lungimea este 5 $x$. Avem ecuaţia $x + 5x = 60$. Rezolvăm ecuaţia : $6x = 60$. $x = 60 : 6$ ; $x = 10$. Rezultă că lăţimea are 10 hm iar lungimea 50 hm. Atunci aria este 10 hm$\cdot$50 hm = 500 hm$^2$. Găsiţi dimensiunile dreptunghiului folosind şi metoda grafică.

# CLASA A VI-A

## REZOLVĂRILE ŞI REZULTATELE PROBLEMELOR PENTRU CLASA A VI-A

**VI.A.1.** $A = 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 3^n \cdot 3^2 + 3^n - 2^n \cdot 2^2 - 2^n =$
$= 3^n \cdot (9 + 1) - 2^n \cdot (4 + 1) = 3^n \cdot 10 - 2^{n-1} \cdot 2 \cdot 5 =$
$= 10 \cdot (3^n - 2^{n-1})$.

**VI.A.2.** Fie $p$ un divizor comun al numerelor $a$ şi $a + b$, $p \in \mathbf{N}^*$. Rezultă că $p$ este divizor şi pentru $(a + b) - a = b$, deci $p$ este divizor şi pentru $a$ şi pentru $b$. Cum fracţia $a/b$ este ireductibilă din ipoteză, avem $p = 1$. În concluzie, fracţia $\dfrac{a}{a+b}$ se poate simplifica doar prin 1, deci este ireductibilă.

**VI.A.3.** Notăm $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 15 + 20$ şi avem:

$$\frac{182}{A} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 7 \ldots \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 + 20}{2 \cdot 7 \cdot 13} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \ldots \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 7 \cdot 13} + \frac{20}{2 \cdot 7 \cdot 13} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15 + \frac{20}{182}.$$

Deci cîtul este $1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15$ şi restul este 20. (S-a folosit teorema împărţirii cu rest sub forma : $\dfrac{D}{1} = C + \dfrac{R}{1}\Big)$.

**VI.A.4.** Soluţia I.

Fie $N$ un număr care împărţit la 10 dă restul 3; vom arăta că împărţit la 15 nu poate da restul 4.

Avem $N = 10k + 3$, de unde ultima cifră a lui $N$ este 3. Presupunînd că $N$, împărţit la 15, dă restul 4, avem $N = 15t + 4$ sau $N - 4 = 15t$, adică $N - 4$ divizibil cu 5. Cum ultima cifră a lui $N$ era 3, ultima cifră a lui $N - 4$ va fi 9, deci $N - 4$ nu se divide cu 5, deci $N$ împărţit la 15 nu poate da restul 4.

Soluţia a II-a

Presupunem că există $N$ care împărţit la 10 să dea restul 3 şi împărţit la 15 să dea restul 4.

Avem : $N = 10k + 3$ sau $N - 3 = 10k$

$N = 15t + 4$ sau $N - 4 = 15t$

Deducem că $N - 3$ şi $N - 4$ sînt divizibile cu 5, deci trebuie ca şi diferenţa lor să se dividă cu 5. Dar $(N - 3) - (N - 4) = 1$, care nu se divide cu 5, deci presupunerea făcută este falsă.

Soluţia a III-a

Dacă numărul $N$ împărţit la 10 dă rest 3 $\Rightarrow 10 \mid (N - 3)$.

Dacă numărul $N$ împărţit la 15 dă rest 4 $\Rightarrow 15 \mid (N - 4)$.

Din cele două afirmaţii de mai sus rezultă $5 \mid (N - 3)$ şi $5 \mid (N - 4)$. Dar $N - 3$ şi $N - 4$ sînt numere consecutive şi ar trebui să fie, ambele, multipli de 5, ceea ce este fals.

**VI.A.5.**

Din $\frac{a}{b} = 0,6$, rezultă $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \cdot 0,6$, de unde :

$$\frac{2a + 3b}{3b} = \frac{2a}{3b} + \frac{3b}{3b} = \frac{2}{5} + 1 = \frac{7}{5},$$

O altă metodă constă în a exprima pe $a$ în funcţie de $b$ din relaţia $\frac{a}{b} = 0,6$. Rezultă $a = 0,6 \cdot b$ şi deci :

$$\frac{2a + 3b}{3b} = \frac{2 \cdot 0,6 \cdot b + 3b}{3b} = \frac{1,2b + 3b}{3b} = \frac{4,2b}{3b} = \frac{4,2}{3} = \frac{42}{30} = \frac{7}{5}.$$

**VI.A.6.** Avem întîi : $n = 1986\,(1986 - 1) - 1985 =$

$= 1986 \cdot 1985 - 1985 = 1985\,(1986 - 1) = 1985^2.$

Acum, din proporţie, deducem :

$$\frac{x}{1985} = \frac{5 \cdot 397}{n}, \text{ de unde } x = \frac{1985 \cdot 5 \cdot 397}{n} = \frac{1985 \cdot 1985}{1985^2} = 1.$$

**VI.A.7.** Numărul $\overline{4a6}$ este divizibil cu 9 dacă suma $4 + a + 6$ se divide cu 9, adică $10 + a$ este divizibil cu 9. Cum $a$ este cifră, deducem $a = 8$ şi deci :

$$\frac{x}{2} = \frac{486}{5}, \text{ de unde } x = \frac{486 \cdot 2}{5}, \text{ adică } x = \frac{972}{5}.$$

**VI.A.8.** În primul rînd se obţine $b = 5$. Apoi, folosind criteriul de divizibilitate cu 9, obţinem că suma cifrelor numărului $\overline{4a6}$ este divi-

zibilă cu 9, deci $a+10$ este multiplu de 9, cu $a \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Rezultă ușor $a=8$. Proporția devine :

$$\frac{x}{2}=\frac{486}{5}, \text{ de unde } x=\frac{2\cdot 486}{5}=\frac{972}{5}=194\frac{2}{5}, \text{ sau } x=194,4.$$

**VI.A.9.** a)

$$F=\frac{\overline{123\,123\ldots 123}}{\overline{321\,321\ldots 321}}=\frac{123\cdot\overline{100\,100\ldots 1\,001}}{321\cdot\overline{100\,100\ldots 1\,001}}=\frac{123}{321}=\frac{41}{107},$$

unde numărul prin care s-a simplificat are $n$ cifre de 1 distanțate prin cîte două zerouri. Corectitudinea rezultatului înmulțirilor se poate verifica pe cîteva exemple particulare.

b) Dacă :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}, \text{ atunci } \frac{3a-b}{b-2a}=\frac{3c-d}{d-2c},$$

deoarece ultima proporție este echivalentă cu :

$$\frac{3\cdot\frac{a}{b}-1}{1-2\cdot\frac{a}{b}}=\frac{3\cdot\frac{c}{d}-1}{1-2\cdot\frac{c}{d}}, \text{ evident adevărată pentru } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

Pentru $c=41$ și $d=107$, obținem :

$$\frac{3a-b}{b-2a}=\frac{3\cdot 41-107}{107-2\cdot 41}=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

**VI.A.10.** Din $\frac{3}{a}=\frac{4}{b}=\frac{12}{c}=13$ se deduce $\frac{3}{a}=\frac{13}{1}$, deci $a=\frac{3}{13}$ și, analog,

$$b=\frac{4}{13}, \quad c=\frac{12}{13}.$$

1) $(3-a)a+(4-b)b+(12-c)c=\left(3-\frac{3}{13}\right)\frac{3}{13}+\left(4-\frac{4}{13}\right)\frac{4}{13}+$

$$+\left(12-\frac{12}{13}\right)\frac{12}{13}=12.$$

2) $(3+a)a+(4+b)b+(12+c)c=\left(3+\frac{3}{13}\right)\frac{3}{13}+\left(4-\frac{4}{13}\right)\frac{4}{13}+$

$$+\left(12+\frac{12}{13}\right)\frac{12}{13}=14.$$

(3) $a^2+b^2+c^2=\frac{3^2}{13^2}+\frac{4^2}{13^2}+\frac{12^2}{13^2}=1.$

**VI.A.11.** Avem : $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{x+y+z}{3+4+5}=\frac{24+y}{12}$.

Din $\frac{y}{4}=\frac{24+y}{12}$ deducem $y=12$

Din $\frac{x}{3}=\frac{12}{4}$ şi $\frac{12}{4}=\frac{z}{5}$ aflăm $x=9$ şi $z=15$.

Altfel : $\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}=\frac{x+z}{3+5}=\frac{24}{8}=3 \Rightarrow \frac{x}{3}=3 \Rightarrow x=9$ ;

$\frac{y}{4}=3 \Rightarrow y=12$ ; $\frac{z}{5}=3 \Rightarrow z=15$.

**VI.A.12.** Din condiţia a) avem $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{5}=\frac{t}{7}$. Amplificînd prima fracţie cu 7, a doua cu 5, a treia cu 3 şi a patra cu 2, obţinem : $\frac{7x}{14}=\frac{5y}{15}=$ $=\frac{3z}{15}=\frac{2t}{14}=\frac{7x+5y+3z+2t}{14+15+15+14}=\frac{116}{58}=2$. De aici deducem : $x=4$, $y=6$, $z=10$, $t=14$.

**VI.A.13.** Din $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{6}$ deducem $\frac{c^3}{b^3}=\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{4}\cdot\frac{c}{6}=8$; de unde :

$a^3=3^3\cdot 8=3^3\cdot 2^3=(3\cdot 2)^3=6^3$, deci $a=6$

$b^3=4^3\cdot 8=4^3\cdot 2^3=(4\cdot 2)^3=8^3$, deci $b=8$

$c^3=6^3\cdot 8=6^3\cdot 2^3=(6\cdot 2)^3=12^3$, deci $c=12$.

**VI.A.14.** Avem $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}$ (1) ; $xyz=192$ (2). Deci, $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}$ şi $\frac{x}{3}=\frac{z}{4}$

deducem : $y=\frac{2x}{3}$ şi $z=\frac{4x}{3}$ (3).

Înlocuim în (2) : $\frac{8\cdot x^3}{9}=192$ sau $x^3=\frac{9\cdot 192}{8}$ sau, încă, $x^3=$ $=\frac{3^3\cdot 2^6}{2^3}$, de unde $x^3=6^3$, sau $x=6$ ; din (3) avem $y=4$ şi $z=8$.

Altfel :

Dacă notăm $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{4}=k$ obţinem $x=3k$ ; $y=2k$ ; $z=$ $=4k \Rightarrow xyz=3\cdot 2\cdot 4k^3=24k^3$; dar, din ipoteză, $xyz=192$, deci $24k^3=$ $=192$ sau $k^3=8=2^3$, deci $k=2$. Soluţiile vor fi : $x=3\cdot 2=6$ ; $y=4$ ; $z=8$.

**VI.A.15.** a) Avem, exprimînd toate numerele în funcţie de $a$ : $b = 2a$; $2c = 3b = 3 \cdot 2a = 6a$, de unde $c = 3a$ şi $3d = 4c = 4 \cdot 3a = 12a$, de unde $d = 4a$.

Atunci $b^2 = (2a)^2 = 4a^2$ şi $ad = a \cdot 4a = 4a^2$, deci $b^2 = ad$.

b) Acum, din $a + b + c + d = 48$, deducem $a + 2a + 3a + 4a = 48$, $10a = 48$, de unde $a = 48/10 = 4,8$ şi $b = 2a = 2 \cdot 4,8 = 9,6$; $c = 3a = 14,4$ ; $d = 19,2$.

Altfel :

a) Problema poate fi rezolvată şi observînd că egalităţile din enunţ se pot scrie sub forma : $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ ; $\frac{b}{c} = \frac{2}{3}$ ; $\frac{c}{d} = \frac{3}{4}$ ; din ultimele două, prin înmulţire, se obţine : $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$ şi, cu prima, rezultă $\frac{a}{b} = \frac{b}{d}$, de unde $b^2 = a \cdot b$.

b) Egalităţile pot fi puse şi altfel, sub formă de proporţii, anume : $\frac{a}{1} = \frac{b}{2}$; $\frac{b}{2} = \frac{c}{3}$; $\frac{c}{3} = \frac{d}{4}$, de unde $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4} = \frac{a+b+c+d}{1+2+3+4} = \frac{48}{10}$. Rezultă $a = \frac{48 \cdot 1}{10} = 4,8$ ; $b = \frac{48 \cdot 2}{10} = 9,6$ ; $c = \frac{48 \cdot 3}{10} = 14,4$ ; $d = \frac{48 \cdot 4}{10} = 19,2$.

**VI.A.16.** Din enunţ rezultă că, pentru $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$, avem $\frac{m(\widehat{A})}{1} = \frac{m(\widehat{B})}{4}$, sau $\frac{m(\widehat{A})}{4} = \frac{m(\widehat{B})}{1}$. În primul caz, $\frac{m(\widehat{A})}{1} = \frac{m(\widehat{B})}{4} = \frac{m(\widehat{C})}{4} = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}{9} = \frac{180°}{9} = 20°$, de unde $m(\widehat{A}) = 20°$ ; $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 80°$.

În al doilea caz, $\frac{m(\widehat{A})}{4} = \frac{m(\widehat{B})}{1} = \frac{m(\widehat{C})}{1} = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}{6} = 30°$, de unde $m(\widehat{A}) = 120°$ ; $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 30°$.

**VI.A.17.** Fie $n$ numărul bancnotelor de 10 lei, $m$ al celor de 25 lei. Din problemă $\frac{n}{m} = \frac{3}{4}$ sau, încă, $\frac{n}{3} = \frac{m}{4}$. Rezultă $\frac{10n}{30} = \frac{25m}{100} = \frac{10n + 25m}{130}$. Cum suma totală, $10n + 25m$, este cuprinsă între 500 şi 600 lei, avem $\frac{500}{130} < \frac{10n}{30} < \frac{130}{600}$ şi, deci, $11\frac{7}{13} < n < 13\frac{11}{13}$, $n \in \mathbf{N}$, adică $n \in \{12 ; 13\}$. Dacă $n = 13$, din proporţia iniţială verificată de $m$ şi $n$, rezultă $m = 4 \cdot \frac{13}{3} \notin \mathbf{N}$, deci rămîne doar $n = 12$, care dă $m = 16$. Suma va fi, deci, de 5 220 lei.

**VI.A.18.** Fie $x$, $y$, $z$, respectiv valorile premiilor I, II, III. Avem : $\frac{x}{8}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$ şi $\frac{1}{5}x-\frac{1}{7}y=48$. Înmulţind ultima relaţie în ambii membri cu 35, obţinem $7x-5y=1\,680$. Din primele două rapoarte ale şirului din ipoteză avem $\frac{x}{8}=\frac{y}{7}$, de unde $\frac{7x}{7\cdot 8}=\frac{5y}{5\cdot 7}$, adică $\frac{7x}{56}=$ $=\frac{5y}{35}=\frac{7x-5y}{56-35}=\frac{1\,680}{21}$. Obţinem $7x=\frac{56\cdot 1\,680}{21}=4\,480$ şi $x=\frac{4\,480}{7}$ $=640$ ; $5y=\frac{35\cdot 1\,680}{21}=2\,800$ şi $y=\frac{2\,800}{5}=560$. Folosind una din proporţiile de la început, avem : $\frac{x}{8}=\frac{z}{5}$, $\frac{640}{8}=\frac{z}{5}$, $z=\frac{5\cdot 640}{8}=400$.

**VI.A.19.** Din prima relaţie avem $A\cdot 5=7\cdot B$, de unde $\frac{A}{7}=\frac{B}{5}$ şi rezultă $A\cdot\frac{1}{7}=B\cdot\frac{1}{5}$.

Din a doua relaţie, $C=\frac{60}{100}\cdot B$, sau, încă, $C=\frac{3}{5}\cdot B$ şi, înmulţind ambii membri ai egalităţii cu $\frac{1}{3}$, obţinem $C\cdot\frac{1}{3}=B\cdot\frac{1}{5}$.

Din a treia relaţie obţinem $\frac{C}{D}=1{,}5$, sau $\frac{C}{D}=\frac{3}{2}$, de unde, schimbînd mezii între ei, se obţine $\frac{C}{3}=\frac{D}{2}$ sau, încă, $C\cdot\frac{1}{3}=D\cdot\frac{1}{2}$

Avem, deci : $A\cdot\frac{1}{7}=B\cdot\frac{1}{5}=C\cdot\frac{1}{3}=D\cdot\frac{1}{2}$, adică numerele $A$, $B$, $C$, $D$ sînt invers proporţionale cu $\frac{1}{7},\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{2}$. Pentru a demonstra afirmaţia problemei rămîne să observăm că $\frac{1}{7}=0,(142\,857)$, $\frac{1}{5}=0{,}2$ şi $\frac{1}{2}=0{,}5$.

**VI.A.20.** Fie $x$ suma primită zilnic de al doilea muncitor. Suma totală primită de el este $12\cdot 100\%$ din $x$, adică $1\,200\%$ din $x$. Al doilea muncitor primeşte zilnic $125\%$ din $x$, deci suma totală primită de el va fi $15\cdot 125\%$ din $x$, adică $1\,875\%$ din $x$. Cei 3 444 lei plătiţi ambilor muncitori pe întreaga perioadă reprezintă, deci, $1\,200\%$ din $x+1\,875\%$ din $x$, adică $3075\%$ din $x$. Atunci $x=3444:\frac{3\,075}{100}=3\,444\cdot\frac{100}{3\,075}=112$. În concluzie, suma primită de primul muncitor este $1\,875\%$ din 112, adică 2 100 lei, iar suma primită de al doilea muncitor este $1\,200\%$ din 112, adică 1 344 lei.

**VI.A.21.** După prima sortare a rămas $90\%$ din cantitatea inițială, adică $\frac{90}{100}\cdot 50 = 45$ (t). După a doua sortare au mai rămas 43,2 t, deci pierderea la a doua sortare a fost de $45 - 43{,}2 = 1{,}8$ (t). Din $\frac{1{,}8}{50} = \frac{x}{100}$, rezultă $x = \frac{1{,}8 \cdot 100}{50} = 3{,}6$, deci raportul procentual căutat este $3{,}6\%$.

**VI.A.22.** $3^{34} = 3^{2\cdot 17} = 9^{17}$ ; $2^{51} = 2^{3\cdot 17} = 8^{17}$. Cum $8^{17} < 9^{17}$, deducem că $2^{51} < 3^{34}$.

**VI.A.23.** $a = 2^{52} = 2\cdot 2^{51} = 2\cdot 2^{3\cdot 17} = 2(2^3)^{17} = 2\cdot 8^{17}$

$b = 3^{35} - 9^{17} = 3\cdot 3^{34} - 9^{17} = 3\cdot 3^{2\cdot 17} - 9^{17} =$
$= 3\cdot (3^2)^{17} - 9^{17} = 3\cdot 9^{17} - 9^{17} = 9^{17}(3-1) = 2\cdot 9^{17}$.

Avem de comparat $a = 2\cdot 8^{17}$ și $b = 2\cdot 9^{17}$. Cum $8 < 9^{17}$, rezultă că $8^{17} < 9^{17}$ și, încă, $2\cdot 8^{17} < 2\cdot 9^{17}$, adică $a < b$.

**VI.A.24.** Avem : $b = (2^{100} - 2^{99} + 3^{68} : 3^{67} - 2^{99})^{46} =$
$= (2^{100} - 2\cdot 2^{99} + 3)^{46} = 3^{46}$. Deci $a = 2^{69}$ și $b = 3^{46}$. În continuare, vezi ex. precedent.

**VI.A.25.** Avem $A = 16\cdot 11^4 - (2\cdot 11)^4 + 1 = 16\cdot 11^4 - 2^4\cdot 11^4 + 1 =$
$= 16\cdot 11^4 - 16\cdot 11^4 + 1 = 1$.

$B = 27\cdot 11^3 - (3\cdot 11)^3 + 2 = 27\cdot 11^3 - 3^3\cdot 11^3 + 2 =$
$= 27\cdot 11^3 - 27\cdot 11^3 + 2 = 2$.

Atunci $C_0 = (A - B)^0 = (1-2)^0 = 1$ ; $C_1 = (A - B)^1 = (-1)^1 = -1$ și, în general, $C_k = (A - B)^k = (1-2)^k = (-1)^k$. Calculînd sumele $S_k = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_k$ pentru primele valori ale lui $k$ obținem : $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 0$ etc., și sîntem conduși la concluzia că $S_k = 1$ pentru $k$ par și $S_k = 0$ pentru $k$ impar.

**VI.A.26.** $[0,(3) + 2,(45) + 0,1(26)] : \left(\frac{1}{3} + 2\frac{5}{11} + \frac{25}{198}\right) - 1986 =$

$$= \left(\frac{3}{9} + \frac{245-2}{99} + \frac{126-1}{990}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{27}{11} + \frac{25}{198}\right) -$$

$$- 1986 = \left(\frac{3}{9} + \frac{243}{99} + \frac{125}{990}\right) : \left(\frac{1}{3} + \frac{27}{11} + \frac{25}{198}\right) - 1986 =$$

$$= \frac{330 + 2\,430 + 125}{990} : \frac{66 + 486 + 25}{198} - 1986 = \frac{2\,885}{990} : \frac{577}{198} - 1986 =$$

$$= \frac{2\,885}{990}\cdot\frac{198}{577} - 1986 = 1 - 1986 = -1985.$$

**VI.A.27.** Observăm că în suma noastră sînt 10 termeni. Grupînd doi cîte doi și dînd factor comun, obținem :

$$a = 13^8(13-14) + 14\cdot 13^7 - 14\cdot 13^6 + 14\cdot 13^5 - 14\cdot 13^4 + 14\cdot 13^3 -$$
$$- 14\cdot 13^2 + 14\cdot 13 - 1 = -13^8 + 14\cdot 13^7 - 14\cdot 13^6 + \ldots + 14\cdot 13 - 1.$$

Procedînd analog, obţinem :

$$a = 13^7(-13 + 14) - 14 \cdot 13^6 + 14 \cdot 13^5 + \ldots + 14 \cdot 13 - 1 =$$
$$= 13^7 - 14 \cdot 13^6 + \ldots + 14 \cdot 13 - 1.$$

Continuăm procedeul şi obţinem, în final, $a = 12$.

Altfel :

Numărul $a$ se mai poate scrie :

$$a = 13^9 - (1 + 13) \cdot 13^8 + (1 + 13) \cdot 13^7 - (1 + 13) \cdot 13^6 + \ldots +$$
$$+ (1 + 13)\,13 - 1 = 13^9 - 13^8 - 13^9 + 13^7 + 13^8 + 13^6 + 13^7 + \ldots +$$
$$+ 13 + 13^2 - 1.$$

Deci : $a = 13 - 1 = 12$.

**VI.A.28.** Pentru $a = 9$, $b = -3$, $c = -5$ avem : $x = 9 - [(-3) + (-5)] =$

$$= 9 - (8) = 9 + 8 = 17.$$

Pentru $a = -1$, $b = -8$, $c = 16$ avem : $x = (-1) - [(-8) + 16] =$

$$= (-1) - 8 = -9.$$

**VI.A.29.** $A = [(-1)^{1985} \cdot (-1)^{1986})^3 \cdot a = (-1)^3 \cdot a = -a.$

Pentru calcularea lui $B$ distingem două cazuri :

I. $n = 2k$ (număr par)

$B = 1 - 1 + 1 + 1 + 1 \cdot (-1) = 1.$

II. $n = 2k + 1$ (număr impar)

$B = -1 + 1 - 1 + 1 + (-1) \cdot 1 = -1.$

În cazul I, $B = 1$, opusul său este $-1$, deci $A = -a = -1$ implică $a = 1$.

În cazul II, $B = -1$, opusul său este 1, deci $A = -a = 1$, implică $a = -1$.

**VI.A.30.** Demonstrăm implicaţia „ $\Rightarrow$ ". Distingem opt cazuri :

1. $m$ par ; $n$ par ; $p$ par ;
2. $m$ par ; $n$ par ; $p$ impar ;
3. $m$ par ; $n$ impar ; $p$ par ;
4. $m$ impar ; $n$ par ; $p$ par ;
5. $m$ impar ; $n$ impar ; $p$ par ;
6. $m$ impar ; $n$ par ; $p$ impar ;
7. $m$ par ; $n$ impar ; $p$ impar ;
8. $m$ impar ; $n$ impar ; $p$ impar.

Vom nota $S_i$ suma în cazul $i$ ; $i = 1, 2, \ldots, 8$.

$$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1\in\mathbf{Z}, \text{ iar } n+p \text{ număr par.}$$

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}\notin\mathbf{Z}.$$

$$S_3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\notin\mathbf{Z}.$$

$$S_4=\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=0\in\mathbf{Z}, \text{ iar } n+p \text{ număr par.}$$

$$S_5=\frac{-1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{-2}{3}\notin\mathbf{Z}.$$

$$S_6=\frac{-1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{-1}{3}\notin\mathbf{Z}.$$

$$S_7=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=0\in\mathbf{Z}, \text{ iar } n+p \text{ număr par.}$$

$$S_8=\frac{-1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=-1\in\mathbf{Z}, \text{ iar } n+p \text{ număr par.}$$

Demonstrăm implicaţia "$\Leftarrow$".

Din $n+p$ număr par rezultă că $n$ şi $p$ sînt ambele pare sau ambele impare, iar $m$ poate fi par sau impar. Sînt situaţiile corespunzătoare cazurilor 1, 4, 7, 8.

**VI.A.31.** Determinăm mulţimea $B$. Relaţia $|x|<2$ este echivalentă cu $-2<x<2$, deci $B=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Avem condiţiile :

(1) $x+y>0$.

(2) $xy<0$.

Din (2) deducem că dacă $x>0$, atunci $y<0$ şi invers.

Deci : $x=-2$ şi $y\in\{0, 1, 2\}$.

Sînt posibile perechile $(-2, 0)$, $(-2, 1)$, $(-2, 2)$, dar niciuna nu verifică relaţia (1).

$x=-1$, $y\in\{0, 1, 2,\}$.

Sînt posibile perechile $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$, dar numai $(-1, 2)$ verifică relaţia (1).

$x=0$, $y\in B$, dar numai perechile $(0, 1)$ şi $(0, 2)$ verifică şi condiţia (1).

$x=4$, $y\in\{-2, -1, 0\}$ şi toate perechile $(4, -2)$, $(4, -1)$ $(4, 0)$ verifică condiţia (1).

Avem, deci, următoarele perechi care verifică condiţiile (1) şi (2) : $(-1, 2)$ ; $(0, 1)$ ; $(0, 2)$ ; $(4, -2)$ ; $(4, -1)$ ; $(4, 0)$.

**VI.A.32.** Din egalitatea $27b = 6a$ deducem $b = \frac{2a}{9}$.

Din egalitatea $54c = 6a$ deducem $c = \frac{a}{9}$.

Din egalitatea $36d = 6a$ deducem $d = \frac{a}{6}$.

În egalitatea $6a = x(a + b + c + d)$ înlocuim $b$, $c$, $d$ şi avem : $6a = x\left(a + \frac{2a}{9} + \frac{a}{9} + \frac{a}{6}\right)$, care, după efectuarea parantezei, conduce la : $6a = \frac{3a}{2}x$. Pentrucă $a \neq 0$ avem : $x = 6a \cdot \frac{2}{3a}$, adică $x = 4$.

**VI.A.33.** Ştim că $5^n$ are ultima cifră 5, iar $1981^n$ are ultima cifră 1.

Cum 1983 este număr impar, $(-5)^{1983}$ va fi un număr negativ terminat în 5, iar $1981^{1983}$ va fi un număr pozitiv terminat în 1. Din regula de adunare a numerelor întregi avem ultima cifră a lui $N_1$ egală cu 6. Pentru $N_2$ ambele numere sînt pozitive, terminate în 5, respectiv 1, deci $N_2$ se termină în 6.

**VI.A.34.** Fie $a$ şi $b$ cele două numere. Din enunţ avem :

$$a + b = 126$$

$$a \cdot b = 3393$$

Trebuie să calculăm suma $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Avem :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{b + a}{ab} = \frac{126}{3393} = \frac{42}{1131}.$$

**VI.A.35.** Din operaţiile cu puteri avem :

$$\frac{2^k}{3^k} \cdot \frac{3^{k+1}(1 + 3^{k+1})}{2^{k+1}(1 + 3^{k+1})} = \frac{3}{2}.$$

**VI.A.36.** a) Din $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ rezultă $\frac{a}{2 \cdot 4} = \frac{b}{3 \cdot 4}$, adică $\frac{a}{8} = \frac{b}{12}$, deci $k = 12$.

Din $\frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ rezultă $\frac{b}{4 \cdot 3} = \frac{c}{5 \cdot 3}$, adică $\frac{b}{12} = \frac{c}{15}$, deci $p = 15$.

b) 1. Aplicînd proprietatea şirului de rapoarte egale cu :

$$\frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a + b + c}{8 + 12 + 15} = \frac{70}{35} = 2,$$

obţinem $a = 16$, $b = 24$, $c = 30$.

2. Cum $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$, rezultă $\frac{a\cdot b}{2\cdot 3}=\frac{b\cdot b}{3\cdot 3}$, deci $\frac{a\cdot b}{6}=\frac{b^2}{9}$, $ab=\frac{6b^2}{9}=$ $=\frac{2b^2}{3}$ și, analog, din $\frac{b}{4}=\frac{c}{5}$, se obține $\frac{bc}{20}=\frac{b^2}{16}$, $bc=\frac{20b^2}{16}=\frac{5b^2}{4}$.

Avem, deci, $69=ab+bc=\frac{2b^2}{3}+\frac{5b^2}{4}=\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{4}\right)b^2=\frac{23}{12}b^2$, de unde $b^2=69\cdot\frac{12}{23}=36$. Pentru $b=6$, se obțin $a=4$, $c=\frac{15}{5}$. Pentru $b=-6$ se obțin $a=-4$, $c=\frac{15}{2}$.

3) Avem $\frac{a}{8}=\frac{b}{12}=\frac{c}{15}$, de unde $\frac{a^2}{64}=\frac{b^2}{144}=\frac{c^2}{225}=\frac{a^2+b^2+c^2}{64+144+225}=$ $=\frac{433}{433}=1$, deci $a=64$, $b=144$, $c=225$ și obținem $a=8$, $b=12$, $c=15$ sau $a=8$, $b=-12$, $c=-15$.

**VI.A.37.** Ecuația se scrie : $10x+y+10y+z+10x+z=246$, cu $x$, $y$, $z\in\{0, 1, \ldots, 9\}$, $x, y\neq 0$, sau încă, $2\cdot\overline{xz}+11y=246$, de unde se observă că $y$ trebuie să fie o cifră pară, nenulă, deci $y\in\{2, 4, 6, 8\}$.

Pentru $y=2$, rezultă $\overline{xz}=142$, imposibil.

Pentru $y=4$, rezultă $\overline{xz}=101$, de asemenea imposibil.

Pentru $y=6$, rezultă $\overline{xz}=90$, deci $x=9$, $z=0$.

Pentru $y=8$, rezultă $\overline{xz}=79$, deci $x=7$, $z=9$.

În concluzie, soluțiile problemei sînt :

$$\begin{cases}x=9\\y=6\\z=0\end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases}x=7\\y=8\\z=9\end{cases}$$

**VI.A.38.** Fie $x$ suprafața însămînțată cu ovăz. Din problemă, rezultă că suprafața însămînțată cu secară este $4x$, cea cu orz, $2x$, iar cea cu grîu, $3\cdot(2x)=6x$. Deci, suprafața totală este : $x+4x+2x+6x=13x$.

Din enunț, această suprafață totală numără 1 300 ha. Deci : $13x=$ $=1\,300$, de unde $x=1\,300:13=100$ (ha).

Obținem că suprafața însămînțată cu grîu este $6x=600$ (ha), cea cu orz este $2x=200$ (ha), cea cu ovăz $x=100$ (ha) și cea cu secară $4x=400$ (ha).

**VI.A.39.** Descompunem : $800=2^5\cdot 5^2$. Această descompunere o putem scrie :

1) $800=5^2\cdot 2^5$, de unde $m^2=5^2$ și $n+1=2^5$, deci $m=5$ ; $n=31$.

2) $800=5^2\cdot 2^2\cdot 2^3=10^2\cdot 2^3$, de unde $m=10$ ; $n=7$.

3) $800 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^2 \cdot 200$, de unde $m = 20$ ; $n = 1$.

4) $800 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^3 = 2^2 \cdot 200$, de unde $m = 2$ ; $n = 199$.

5) $800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 2 = 4^2 \cdot 50$, de unde $m = 4$ ; $n = 49$.

6) $800 = 1 \cdot 2^5 \cdot 5^2$, de unde $m = 1$ ; $n = 799$.

Acestea sînt toate cazurile în care 800 se scrie ca un pătrat perfect înmulțit cu un număr. Avem, în final, perechile (5,31) ; (10,7) ; (20,1) ; (2,199) ; (4,49) ; (1,799).

Altfel :

Considerăm $m^2 \cdot (n+1)$ produsul dintre un număr pătrat perfect și un alt număr :

$800 = 1 \cdot 800 \Rightarrow m = 1$ ; $n = 799$.

$800 = 4 \cdot 200 \Rightarrow m = 2$ ; $n = 199$.

$800 = 16 \cdot 50 \Rightarrow m = 4$ ; $n = 49$.

$800 = 25 \cdot 32 \Rightarrow m = 5$ ; $n = 31$.

$800 = 100 \cdot 8 \Rightarrow m = 10$ ; $n = 7$.

$800 = 400 \cdot 2 \Rightarrow m = 20$ ; $n = 1$.

**VI.A.40.** Distingem două cazuri : $n$ par și $n$ impar.

a) Dacă $n$ par, ecuația devine : $xy - 2x - y + 1 = 0$, de unde :

$$y = \frac{2x-1}{x-1}, \text{ sau, încă, } y = 2 + \frac{1}{x-1}.$$

Problema devine : Găsiți $x$ întreg astfel încît $y$ să fie întreg, care conduce la $x = 0$ și $x = 2$, iar $y = 1$, respectiv $y = 3$. Deci, în acest caz avem soluțiile (0, 1) și (2, 3).

b) Dacă $n$ impar, ecuația devine : $-xy + 2x + y + 1 = 0$, care se rezolvă asemănător și avem soluțiile : (2, 5), (0, −1), (−2, 1), (4, 3).

Altfel :
Ecuația se mai poate scrie :

$x(1-y)(-1)^{n+1} = [y(-1)^n + x(-1)^{n+2}] - 1$.

Dar, pentru $n \in \mathbf{N} \Rightarrow (-1)^n = (-1)^{n+2}$. Atunci ecuația devine :

$x(1-y)(-1)^{n+1} = (x+y)(-1)^n - 1$.

Pentru $n$ par $\Rightarrow x(1-y)(-1) - (x+y) \cdot 1 + 1 = 0$ ; $-x + xy - x - y + 1 = 0$ ; $-2x + xy = y - 1$ ; $x(y-2) = y - 1$ ; $x = \frac{y-1}{y-2}$.

Cum $y - 1$ și $y - 2$ sînt numere consecutive, rezultă soluțiile : (0 ; 1) și (2 ; 3).

Pentru $n$ impar : $x(1-y)\cdot 1-(x+y)(-1)+1=0$ ; $x-xy+x+$
$+y+1=0$ ; $2x-xy+y+1=0$ ; $x(2-y)=-(y+1)$ ; $x=\frac{y+1}{y-2}$ ;
$x=\frac{y-2+3}{y-2}=1+\frac{3}{y-2}$ . Soluțiile sînt : (4 ; 3), (0 ; — 1), (2 ; 5),
(— 2 ; 1).

**VI.A.41.** Soluția I

Avem : $3b=206-2a-4c-56d$, număr par, deci $b$ este par și cum este prim, rezultă $b=2$. Înlocuind, obținem : $2a+4c+56d=200$ sau încă $a+2c+28d=100$, de unde $a=100-2c-28d$ și, cu același raționament ca mai sus, deducem $a=2$. Înlocuind, obținem : $2c+28d=$ $=98$, $c+14d=49$. Dacă am avea $d>4$, atunci $49=b+14d>14d>$ $>14\cdot 4=56$, contradicție, deci $d<3$ și cum $d$ este prim, rezultă $d=2$ sau $d=3$.

Dacă $d=2$, obținem $c=21$, neprim, contradicție cu ipoteza. Deci rămîne $d=3$, care dă $c=7$.

În concluzie, $a=2$, $b=2$, $c=7$ și $d=3$.

Soluția a II-a

$3b=206-2a-4c-56d \Rightarrow$

$3b=2(103-a-28d) \Rightarrow b=2$

$3=103-a-2c-28d \Rightarrow a=2(50-c-14d) \Rightarrow a=2$

$1=50-c-14d \Rightarrow c=49-14d.$

Cum $c$ și $d$ sînt numere prime $\Rightarrow c=7$ și $d=3$.

**VI.A.42.** a) Aplicînd proprietățile proporțiilor derivate, obținem succesiv :

$$\frac{7a-2b}{5a+4b}=\frac{2}{15};\quad \frac{2(7a-2b+(5a+4b)}{5a+4b}=\frac{2\cdot 2+15}{15};$$

$$\frac{19a}{5a+4b}=\frac{19}{15};\quad \frac{a}{5a+4b}=\frac{1}{15};\quad \frac{a}{(5a+4b)-5a}=\frac{1}{15-5\cdot 1}:$$

$$\frac{a}{4b}=\frac{1}{10};\quad \frac{4a}{4b}=\frac{4}{10};\quad \frac{a}{b}=\frac{4}{10};\quad \frac{a}{b}=\frac{2}{5}.$$

O a doua metodă ar fi să aducem proporția la o relație mai simplă : $15(7a-2b)=2(5a+4b)$ ; $105a-30b=10a+8b$. Adunăm în ambii membri $(-10a+30b)$ și obținem : $95a=38b$, de unde

$$\frac{a}{b}=\frac{38}{95};\quad \frac{a}{b}=\frac{2}{5}.$$

b) Aplicînd proprietăţile proporţiilor, se obţine pentru

$$\frac{a}{b}=0{,}4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5};\ \frac{9a-2b}{5a+6b}=\frac{9\cdot 2-2\cdot 5}{5\cdot 2+6\cdot 5}=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}.$$

O altă cale ar consta în următorul calcul :

$$\frac{9a-2b}{5a+6b}=\frac{\frac{9a-2b}{b}}{\frac{5a+6b}{b}}=\frac{9\cdot\frac{a}{b}-2}{5\cdot\frac{a}{b}9+}=\frac{9\cdot 0{,}4-2}{5\cdot 0{,}4+6}=\frac{1}{5}.$$

**VI.A.43.** Pentru valorile lui $x$ pentru care $x-3<0$, adică pentru $x\in(-\infty\ ;\ 3)$, ecuaţia devine $-x+3=5$, cu $x=2$, soluţie ce convine cazului analizat.

Pentru $x\in\mathbf{R}$ astfel încît $x-3\geqslant 0$, adică pentru $x\in(3\ ;\ +\infty)$, ecuaţia devine : $x-3=5$, cu $x=8$, soluţie ce convine din nou cazului analizat.

Deci ecuaţia are soluţiile $x=-2$ şi $x=8$.

O altă rezolvare se bazează pe observaţia că $|y|=5$ înseamnă $y=5$ sau $y=-5$, deci $x-3=5$ sau $x-3=-5$, cu aceleaşi soluţii ca mai înainte.

**VI.A.44.**

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{6(x+1)}=0;$$

$$\frac{1}{x+1}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=0;\ \frac{1}{x+1}\cdot\frac{6-3-2-1}{6}=0;\ \frac{1}{x+1}\cdot 0=0$$

verificată pentru orice $x\in\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

**VI.A.45.** Din $4a=20b$ deducem $b=\frac{a}{5}$.

Din $4a=25c$ deducem $c=\frac{4a}{25}$.

Din $4a=50d$ deducem $d=\frac{2a}{25}$.

În $4a=x^2(a+b+c+d)$ înlocuim $b$, $c$ şi $d$. Avem :

$4a=x\left(a+\frac{a}{5}+\frac{4a}{25}+\frac{2a}{25}\right)$ sau $4a=\frac{36ax^2}{25}$, de unde $x=\frac{5}{3}$ sau $x=-\frac{5}{3}$, deoarece $a\neq 0$.

# REZOLVĂRI PROBLEME DE GEOMETRIE CLASA A VI-A

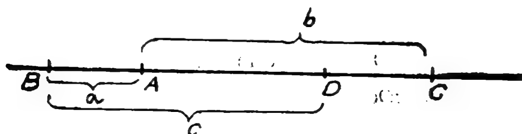
**VI.G.1.** Ordinea este $B—A—D—C$:

$BC = a + b$

$CD = a + b - c$

$AD = c - a$

Sau $C—D—A—B$.



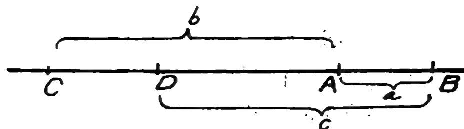




*Fig. VI.G.1.*

**VI.G.2** a) $(AB + BC) + (BC + CD) = AB + 2BC + CD = (AB + BC + CD) + BC$.

b) $(AB + BC)\cdot(BC + CD) = AB\cdot BC + AB\cdot CD + BC^2 + BC\cdot CD$ (membru stîng).

$(AB + BC + CD)\cdot BC + AB\cdot CD = AB\cdot BC + BC^2 + BC\cdot CD + AB\cdot CD$ (membru drept).

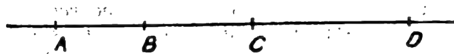



*Fig. VI.G.2.*

**VI.G.3.** Notăm unghiurile adiacente de exemplu $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$, iar bisectoarele lor $OX$, $OY$. Desenăm semidreptele perpendiculare $OX$, $OY$ (deci bisectoarele unghiurilor) și apoi unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$.

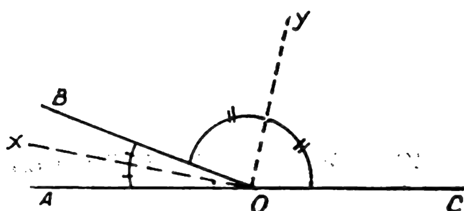



*Fig. VI.G.3.*

Știm de ipoteză că :

(1) $m(\widehat{XOB}) + m(\widehat{BOY}) = 90°$, rezultă că :

(2) $m(\widehat{AOX}) + m(\widehat{YOC}) = 90°$ deoarece $OX$ și $OY$ sînt bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$. Adunînd membru cu membru egalitățile (1) și (2) obținem :

(3) $m(\widehat{AOX}) + m(\widehat{XOB}) + m(\widehat{BOY}) + m(\widehat{YOC}) = 180°$.

(4) $m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{BOC}) = 180°$.

Tot din ipeteză știm că unul din unghiuri este de cinci ori mai mic decît celălalt. Conform acestei ipoteze unghiul cel mai mic este $AOB$, deci relația din ipoteză va fi :

(5) $5 \cdot m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC})$.

Înlocuind relația (5) în relația (4) obținem :

(6) $m(\widehat{AOB}) + 5 \cdot m(\widehat{AOB}) = 180°$, adică

(7) $6 \cdot m(\widehat{AOB}) = 180°$, deci

(8) $m(\widehat{AOB}) = 30°$ și atunci

(9) $m(\widehat{BOC}) = 150°$.

**VI.G.4.** Față de dreapta $AE$ considerăm semidreptele $OB$, $OC$, $OD$ în același semiplan (ipoteză) (fig. VI.G.4.).

Notăm măsura unghiului dat $AOB$ de exemplu $x°$.

Unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ sînt congruente deoarece : laturile lor sînt perpendiculare (ipoteză), semidreptele $OB$, $OC$ și $OD$ sînt în același semiplan determinat de dreapta $OA$ și punctul $B$ (ipoteză). Urmează că măsura $\widehat{COD}$ este tot $x°$. Conform altei condiții din ipoteză $m(\widehat{DOE}) = 2x°$.

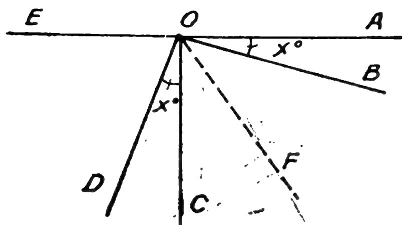


Fig. VI.G.4.

Deducem că :

$m(\widehat{COD}) + m(\widehat{DOE}) = 3x^\circ = 90^\circ$ (ipoteză : $CO \perp OA$). Așadar $x^\circ = 30^\circ$ și $m(\widehat{DOE}) = 60^\circ$. Cum și $OD \perp OB$ (ipoteză) deducem că : $m(\widehat{DOA}) = m(\widehat{DOB}) + m(\widehat{BOA}) = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ deci $m(\widehat{DOF}) = 60^\circ$ și $m(\widehat{EOF}) = 120^\circ$.

**VI.G.5.** Comparăm elementele triunghiurilor $MBC$ și $NCB$.

$\triangle MBC \equiv \triangle NCB$, deoarece : (caz : L.U.L.)

$$\begin{cases} BC = BC \\ MB \equiv NC \quad \text{(jumătăți de segmente congruente)} \\ \hat{B} = \hat{C} \; (ABC \text{ isoscel}) \end{cases}$$

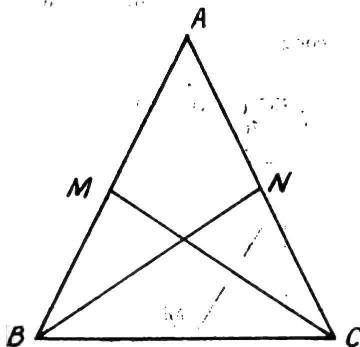


Fig. VI.G.5.

Din cele de mai sus rezultă $(MC) \equiv (NB)$.

**VI.G.6.** În triunghiul echilateral $ABC$ notăm $E'$ intersecția bisectoarei $CI$ cu $AB$ $\Rightarrow$ $CI$ înălțime și mediană $\Rightarrow$ $IE' \perp AB$ și $AE' = BE'$ $\Rightarrow$ în $\triangle AIB$, $IE'$ — înălțime și mediană $\Rightarrow$ $\triangle AIB$ isoscel deci $IE'$ bisectoarea unghiului $AIB$, de unde : $E = E'$.

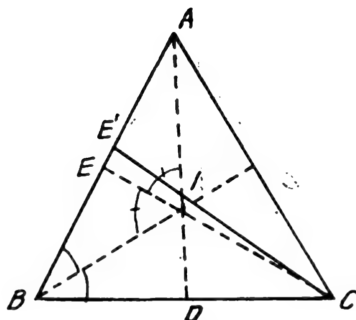



*Fig. VI.G.6.*

Urmează că :

$\triangle BID \equiv \triangle BIE$, deoarece : (caz L.U.L.)

$$\begin{cases} BI = BI \\ BE = BD \text{ (jumătăți de segmente congruente)} \\ \widehat{EBI} \equiv \widehat{IBD} \text{ (} BI \text{ bisectoare)} \end{cases}$$

dar și că :

$\triangle BIE \equiv \triangle AIE$, deoarece : (caz L.L.L.)

$$\begin{cases} EI = EI \\ BI \equiv AI, \text{ (} AIB \text{ isoscel, demonstrat)} \\ BE \equiv EA \text{ (demonstrat)} \end{cases}$$

Cum relația de congruență este tranzitivă, deducem : $\triangle BID \equiv \triangle BIE \equiv \triangle EAI$.

**VI.G.7.** a) Deoarece în $ABC$ ($m(A) = 90°$) și $AM$ este mediana relativă ipotenuzei $\Rightarrow AM = MB = MC$.

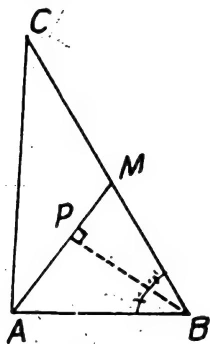



*Fig. VI.G.7.*

Deoarece $AM = MB \Rightarrow \triangle AMB$ isoscel deci $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{B})$. Dar $m(\widehat{B}) = 60°$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle AMB$ echilateral. Rezultă că în $\triangle ABM$, bisectoarea lui $B$ este și înălțime, deci este perpendiculară pe $AM$. Reciproc dacă $BP \perp AM$ și $BP$ este bisectoarea unghiului $B \Rightarrow \triangle ABM$ este isoscel deci $BM = AB$ dar $AB = AM \Rightarrow \triangle ABM$ echilateral, deci : $m(\widehat{B}) = 60°$.

b) Oricare ar fi poziția lui $P$ pe $AM$, $AP + PM = AM$ ori $AM \equiv MB$ și știm că trei segmente pot forma un triunghi dacă suma a oricare două din ele este mai mare decît cel de-al treilea segment. Deci $AP$, $PM$ și $MB$ nu pot forma un triunghi.

**VI.G.8.**

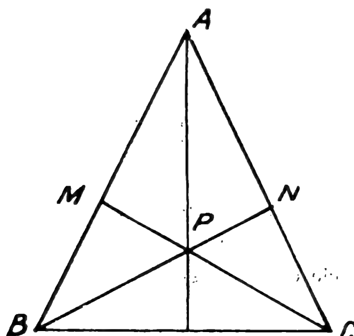


*Fig. VI.G.8.*

a)

$\triangle MBC = \triangle NBC$, deoarece (cazul L.U.L.)
$$\begin{cases} BC = BC \\ MB \equiv NC \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{B} = \widehat{C} \text{ (ipoteză)} \end{cases}$$

Rezultă $BN \equiv CM$.

b) Din faptul că $\triangle MBC \equiv \triangle NBC \Rightarrow m(\widehat{NBC}) = m(\widehat{MCB}) \Rightarrow \triangle BPC$ isoscel $\Rightarrow BP \equiv PC$.

c)

$\triangle APB \equiv \triangle APC$, deoarece (caz L.L.L.)
$$\begin{cases} AP = AP \\ AB = AC \text{ (ipoteză)} \\ BP = CP \text{ (demonstrat)} \end{cases}$$

Rezultă $\widehat{BAP} \equiv \widehat{PAC} \Rightarrow AP$ bisectoarea unghiului $A$.

**VI.G.9.**

a) $\widehat{EAD} = \widehat{EDA} \Rightarrow \triangle EAD$ isoscel $\Rightarrow AE \equiv ED \Rightarrow AP \equiv DF$ (jumătăți de segmente congruente).

Apoi:

$\triangle ADP \equiv \triangle DAF$, deoarece: (caz L.U.L.)
$\begin{cases} AP \equiv DF \text{ (demonstrat)} \\ AD = AD \\ \widehat{PAD} \equiv \widehat{FDA} \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

Rezultă $DP \equiv AF$.

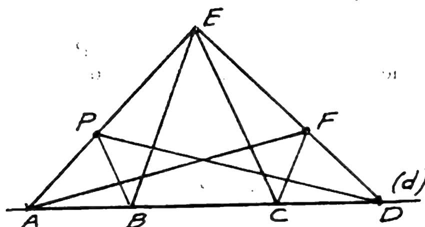



*Fig. VI.G.9.*

b) Dar și

$\triangle APB \equiv \triangle FCD$, deoarece: (caz L.U.L.)
$\begin{cases} AP \equiv DF \text{ (demonstrat)} \\ AB \equiv CD \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{PAB} = \widehat{FDC} \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

c) Din congruența triunghiurilor (pct. b) rezultă $\widehat{APB} \equiv \widehat{DFC}$, dar $m(\widehat{APB}) + m(\widehat{BPE}) = 180°$ și $m(\widehat{DFC}) + m(\widehat{CFE}) = 180°$. Rezultă $\widehat{EPB} \equiv \widehat{EFC}$ (cu suplementele congruente).

d) Și

$\triangle EPB \equiv \triangle EFC$, deoarece: (caz L.U.L.)
$\begin{cases} AP \equiv EF \text{ (jumătăți de segmente congruente)} \\ PB \equiv FC \ (\triangle APB \equiv \triangle DFC \text{ pct. b)} \\ \widehat{EPB} = \widehat{EPC} \text{ (pct. c)} \end{cases}$

**VI.G.10.** Considerăm cunoscută propoziția „triunghiul în care două bisectoare sînt congruente este triunghi isoscel" și deci: $\triangle ABC$ este triunghi isoscel și anume $(AB) \equiv (AC)$.

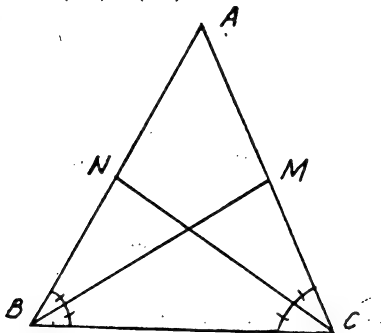



*Fig. VI.G.10.*

CAZUL I

$$\frac{AB}{BC}=\frac{8}{10}\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{4}{5}\Rightarrow AB=\frac{4}{5}\cdot BC;$$

$$AC=\frac{4}{5}\cdot BC \Rightarrow \frac{4}{5}\cdot BC+\frac{4}{5}\cdot BC+BC=49$$

$$\frac{13}{5}\cdot BC=49 \Rightarrow BC=\frac{49\cdot 5}{13}\Rightarrow BC=\frac{245}{13}$$

$$AB=AC=\frac{245}{13}\cdot\frac{4}{5}\Rightarrow AC=\frac{196}{13}.$$

Verificare $AC-AB<BC<AC+AB$.

CAZUL II

$$\frac{BC}{AB}=\frac{8}{10}\Rightarrow AB=\frac{5}{4}\cdot BC;\ 49=\frac{5}{4}\cdot BC+\frac{5}{4}\cdot BC+BC \Rightarrow 49=$$

$$=\frac{14}{4}\cdot BC \Rightarrow BC=49\cdot\frac{4}{14}=14;\ BC=14;\ AB=AC=14\cdot\frac{5}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB=\frac{35}{2}.$$ Se verifică asemănător.

**VI.G.11.**

În $\triangle$ isoscel $ABD$ ($AB=BD$) deoarece $BF\perp AD \Rightarrow AF=DF$. Cum $JF\perp AD \Rightarrow \triangle ADJ$ isoscel $\Rightarrow AJ=JD$. Analog demonstrăm că $AJ\equiv EJ$, deci $DJ=EJ \Rightarrow \triangle DJE$ isoscel $\Rightarrow m(\widehat{EDJ})=m(\widehat{DEJ})=x^\circ$.

Din $\triangle AJD$ isoscel și $\triangle ABD$ isoscel $\Rightarrow m(\widehat{EDJ})=m(\widehat{BAJ})=x^\circ$ (ca diferență de unghiuri congruente). Analog $m(\widehat{DEJ})=m(\widehat{CAJ})=x^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAJ})=m(\widehat{CAJ})=x^\circ \Rightarrow AJ$ bisectoarea $BAC$.

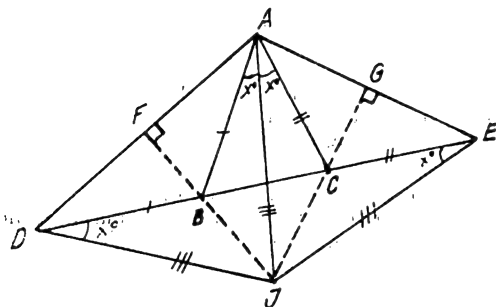



*Fig. VI.G.11.*

**VI.G.12.**

a)

$\triangle MPD \equiv \triangle NPD$, deoarece : $\begin{cases} MP \equiv NP \left( \text{ambele sînt linii mijlocii în } \triangle ABC \text{ și egale, de exemplu cu } \frac{AB}{2} \right) \\ \widehat{MPD} = \widehat{NPD} \text{ (ipoteză)} \\ PD \text{ comună} \end{cases}$

De aici rezultă că : $MD \equiv DN$.

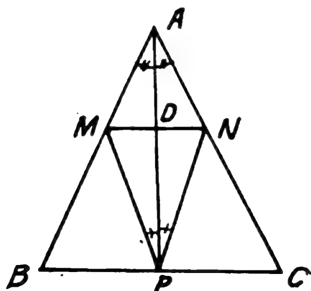



*Fig. VI.G.12.*

b) Ca $\triangle$-ul isoscel $ABC$ ($AB = AC = 4$ cm) să poată fi construit trebuie, de exemplu ca : $AB + AC > BC$, adică $4 + 4 > BC$, deci $BC < 8$ și evident $BC \neq 0$. Așadar $O < BC < 8$. Cu oricare două valori numerice reale, cuprinse între 0 și 8, de exemplu $BC = 1$ sau 3 și $AB = AC = 4$, putem construi $\triangle$ $ABC$.

c) Din ipoteză $AB \equiv AC$, deci $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB})$. Rezultă : $2 \cdot m(\widehat{ABC}) = 180° - m(\widehat{BAC})$ și deci $m \measuredangle (ABC) = 90 - \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$. În concluzie unghiul $ABC$ este ascuțit, adică $0 < m(\widehat{ABC}) < 90$ ($m\widehat{ABC} = 20°$ sau $m(\widehat{ABC}) = 40°$).

**VI.G.13.** Unghiul exterior dat nu poate fi decît de la vîrful triunghiului deoarece, dacă ar fi de la baza triunghiului, unghiurile interioare ale triunghiului și care sînt congruente ar avea fiecare cîte 150°, ori suma lor depășește 180°.

Așadar, $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})$ conform propoziției „într-un triunghi măsura unghiului exterior este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente lui" deci $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 30° \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 30° : 2 = 15°$ (ipoteză, $\triangle$ $ABC$ isoscel). Deci $m(\widehat{B}) = 15°$; $m(\widehat{C}) = 15°$ și $m(\widehat{BAC}) = 150°$ ca suplement al unghiului $\widehat{BAE}$. (Vezi fig. VI.G.13.) ⊥

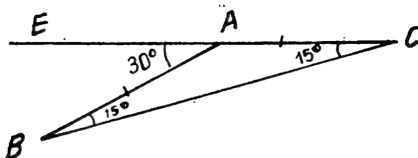



*Fig. VI.G.13.*

**VI.G.14.**

$$\frac{x^\circ}{1}=\frac{y^\circ}{2}=\frac{z^\circ}{3}=\frac{x^\circ+y^\circ+z^\circ}{1+2+3}=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ$$

deci :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^\circ}{1}=30^\circ \Rightarrow x^\circ=30^\circ\\ \frac{y^\circ}{2}=30^\circ \Rightarrow y^\circ=60^\circ\\ \frac{z^\circ}{3}=30^\circ \Rightarrow z^\circ=90^\circ\end{array}\right|$$

Triunghiul în cauză avînd un unghi drept, este evident dreptunghic.

**VI.G.15.** 1. În $\triangle ABC$; $m(\widehat{BAC})=40^\circ$; $m(\widehat{ABC})=m(\widehat{ACB})=\frac{180^\circ-40^\circ}{2}=$ $=\frac{140^\circ}{2}=70^\circ$. Dar $\widehat{DAB}$ exterior $\triangle ABC \Rightarrow m(\widehat{DAB})=m(\widehat{ABC})+$ $+m(\widehat{ACB})=2\cdot 70^\circ=140^\circ$ ; dar $AD\equiv AC$ şi $AC\equiv AB$ (ipoteză) $\Rightarrow AD\equiv$ $\equiv AB \Rightarrow \triangle ABD$ este isoscel $\Rightarrow m(\widehat{ADB})=m(\widehat{DBA})=\frac{180^\circ-140^\circ}{2}=$ $=\frac{40^\circ}{2}=20^\circ$ deci $m(\widehat{DBC})=m(\widehat{DBA})+m(\widehat{ABC})=20^\circ+70^\circ=90^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle DBC$ dreptunghic în $B$.

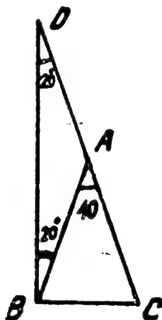



*Fig. VI.G.15.*

2. Se poate arăta în general că proprietatea este adevărată pentru orice $A$ cu $0 < m(\widehat{A}) < 180°$. În $\triangle ABC$ (isoscel) $m(B) = m(C) = \frac{180° - x°}{2}$, unde $x° = m(\widehat{A})$. În $\triangle BAD$, $m(\widehat{BAD})$ (ca unghi exterior $\triangle$-ului $ABC$) $= m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180° - x°$. Tot în $\triangle$-ul $BAD$, $m(\widehat{ABD}) = \frac{x°}{2}$ ($\triangle BAD$ isoscel — ipoteză).

Rezultă : $m(ABD) + m(ABC) = \frac{x°}{2} + \frac{180° - x°}{2} = 90°$, și deci triunghiul $DBC$ este dreptunghic oricare ar fi măsura unghiului $A$.

**VI.G.16.**

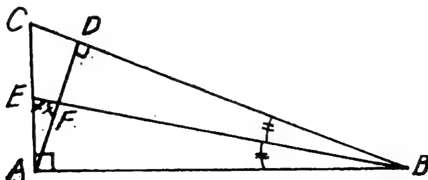



*Fig. VI.G.16.*

a) În $\triangle BDF$, $m(\widehat{BDF}) = 90°$ (ipoteză), deci : $m(\widehat{BFD}) = 90° - \left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)$.

Dar $m(\widehat{BFD}) = m(\widehat{AFE})$ (opuse la vîrf) $\Rightarrow m(\widehat{AFE}) = 90° - m\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)$.

În $\triangle ABE$ dreptunghic (ipoteză), $m(\widehat{AEB}) = 90° - m\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right)$ (2)

Din relația (1) și (2) $\Rightarrow m(\widehat{AFE}) = m(\widehat{AEF}) \Rightarrow \triangle AEF$ isoscel.

b) Dacă $m(\widehat{C}) = 30° \Rightarrow m(\widehat{B}) = 60°$ atunci $m(\widehat{AEF}) = 90° - 30° = 60°$. Știind că triunghiul isoscel cu un unghi de $60°$ este echilateral rezultă $\triangle AEF$ echilateral.

**VI.G.17.** a) $m(\widehat{C}) = 15°$ ; $m(\widehat{B}) = q \cdot m(\widehat{C}) = 15° \cdot q$ ; $m(\widehat{A}) = p \cdot m(\widehat{B}) = 15° \cdot p \cdot q$, dar $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ ; $15° + 15°q + 15°pq = 180°$ (: 15) ; $1 + q + pq = 12$ ; $q + pq = 11$ ; $q(1 + p) = 11 \Rightarrow q = 1$ și $1 + p = 11 \Rightarrow p = 10$ sau $q = 11$ și $1 + p = 1 \Rightarrow p = 0$ imposibil, deoarece $p \in \mathbf{N}^*$. Avem $q = 1$ și $p = 10$.

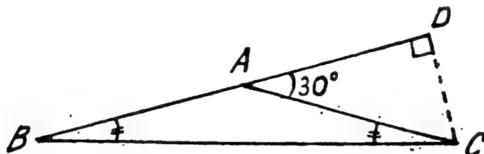



*Fig. VI.G.17.*

$m(\widehat{C}) = 15°$ ; $m(\widehat{B}) = 15 \cdot 1 = 15°$ ; $m(\widehat{A}) = 15 \cdot 10 = 150°$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 15°$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC$ isoscel.

În $\triangle ACD$, $m(\widehat{D}) = 90°$ ; $m(\widehat{DAC}) = 2 \cdot m(\widehat{B}) = 2 \cdot 15° = 30°$ (unghi exterior triunghiului $ABC$) $\Rightarrow$ $CD = \frac{AC}{2}$ (cateta ce se opune unghiului de 30°). Dar $AC \equiv AB \Rightarrow CD = \frac{AB}{2}$.

**VI.G.18.** În $\triangle ABC$, $m(\widehat{B}) = 180° - (m(\widehat{A}) + m(\widehat{C})) = 50°$.

În $\triangle A'NB$, $m(\widehat{N}) = 90° - m\frac{\widehat{B}}{2} = 90° - 25° = 65°$.

În $\triangle CA'M$, $m(\widehat{CMA'}) = 90° - m\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = m(\widehat{M}) = 90° - 35° = 55°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ în $\widehat{\triangle}$ $MNP$, $m(P) = 180° - (55° + 65°) = 60°$.

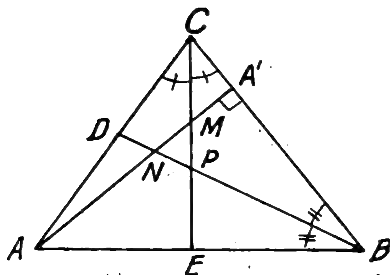



*Fig. VI.G.18.*

În $\triangle BNA$, $m(\widehat{ABN}) = m\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) = 25°$ ; $m(\widehat{NAB}) = 90° - m(\widehat{B}) = 40°$ ; $m(\widehat{ANB}) = 180° - (40 + 25°) = 180° - 65° = 115°$.

**VI.G.19.** $\triangle AEI$ echilateral $\Rightarrow$ $m(\widehat{EIA}) = 60°$ ; $m(\widehat{EIA}) = m(\widehat{DIB})$ (opuse la vîrf) $\Rightarrow$ $m(\widehat{DIB}) = 60°$ (ipoteză).

În $\triangle IDB$, $m(\widehat{D}) = 90°$ și $m(\widehat{DIB}) = 60° \Rightarrow m(\widehat{DBI}) = 30°$, dar $\widehat{DBI} \equiv \widehat{IBA}$ (ipoteză), așadar : (1) $m(\widehat{CBA}) = 60°$.

În $\triangle AIB$, $m(\widehat{AIB}) = 120°$ și $m(\widehat{IBA}) = 30°$ $\Rightarrow$ $(m(\widehat{AIB}) + m(\widehat{IBA}))$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{IAB}) = 180° - 150° = 30°$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{CAB}) = 60° + 30° = 90°$. Așadar : (2) $m(\widehat{CAB}) = 90°$.

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $m(\widehat{ACB}) = 30°$.

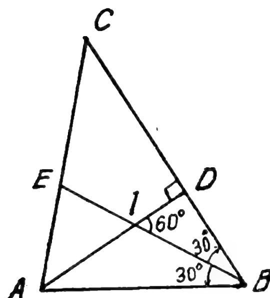



Fig. VI.G.19.

**VI.G.20.** 1. În $\triangle ABD$ : $m(\widehat{B}) = 60°$ ; $m(\widehat{D}) = 80°$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $m(\widehat{A_1}) = 40°$ dar $\widehat{A_1} \equiv \widehat{A_2}$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $m(\widehat{A_2}) = 40°$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{BAC}) = 80°$.

În $\triangle ABC$ : $m(\widehat{A}) = 80°$ (demonstrat) şi $m(\widehat{B}) = 60°$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{C}) = 40°$.

Deci : $m(\widehat{BAC}) = 80°$ ; $m(\widehat{ACB}) = 40°$.

2. $m(\widehat{ACE}) = 90°$ şi $m(\widehat{ACB}) = 40°$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{BCE}) = 50°$.

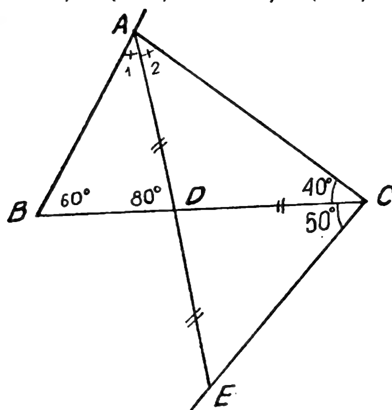



Fig. VI.G.20.

În $\triangle DCE$ : $m(\widehat{CDE}) = 80°$ (opus la vîrf cu $\widehat{ADB}$) ; $m(\widehat{DCE}) = 50°$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{DEC}) = 50°$ $\Rightarrow$ $\triangle DCE$ isoscel $\Rightarrow$ $DC \equiv DE$.

3. În $\triangle ADC$ : $m(\widehat{A_2}) = 40°$ şi $m(\widehat{C}) = 40°$ $\Rightarrow$ $\triangle ADC$ isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $AD \equiv DC$.

Din $AD \equiv DC$ şi $DC \equiv DE$ $\Rightarrow$ $AD \equiv DE$.

**VI.G.21.** a) În $\triangle ABA'$ : $AD$ — înălţime ($AD \perp BC$ ipoteză) ; $AD$ — mediană $AD = DA'$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\triangle ABA'$ isoscel $\Rightarrow$ $m(\widehat{ABA'}) \equiv m(\widehat{AA'B}) =$

$= \frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C})$ (ipoteză). Dar $\widehat{AA'B}$ exterior $\triangle AA'C \Rightarrow m(\widehat{AA'B}) = m(\widehat{A_2}) + m(\widehat{C})$.

Deci :

$\frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C}) = m(\widehat{A_2}) + m(\widehat{C})$; $m(\widehat{A_2}) = \frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C}) - \frac{3}{3} \cdot m(\widehat{C})$ ; $m(\widehat{A_2}) = \frac{4}{3} \cdot m(\widehat{C})$;

$$m(\widehat{A}) = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot m(\widehat{C}) \text{ . Aşadar : } m(\widehat{A}) = \frac{8}{3} \cdot m(\widehat{C}) \text{ .}$$

În $\triangle ABC$ înlocuim în egalitatea : $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$ ;

$\frac{8}{3} \cdot m(\widehat{C}) + \frac{7}{3} \cdot m(\widehat{C}) + m(\widehat{C}) = 180°$ ; $\frac{18}{3} \cdot m(\widehat{C}) = 180°$ ; $m(\widehat{C}) = 180° \cdot \frac{3}{18}$ ;

$m(\widehat{C}) = 30°$ ; $m(\widehat{B}) = \frac{7}{3} \cdot 30°$ ; $m(\widehat{B}) = 70°$ ; $m(\widehat{A}) = \frac{8}{3} \cdot 30°$ ; $m(\widehat{A}) = 80°$.

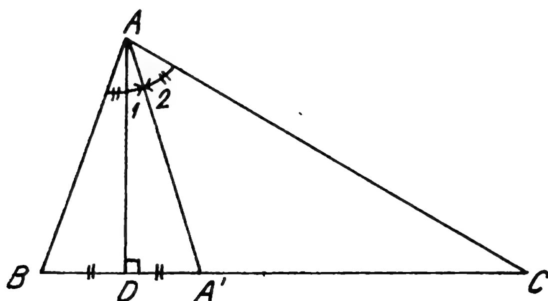



*Fig. VI.G.21.*

b) În $\triangle ABC$ : $m(\widehat{A}) = 90° \Rightarrow m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90°$.

Raţionamentul de la punctul a) ne conduce la : $m(\widehat{ABA'}) = m(\widehat{AA'B}) = m(\widehat{A'AC}) = m(\widehat{C})$ ;

$$m(\widehat{B}) = \frac{m(\widehat{A})}{2} + m(\widehat{C}) \text{ ; } m(\widehat{B}) = \frac{90°}{2} + m(\widehat{C}) \text{ ; } m(\widehat{B}) = 45 + m(\widehat{C}) \text{ ;}$$

$$m(\widehat{B}) - m(\widehat{C}) = 45°.$$

Aşadar : $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90°$ şi $m(\widehat{B}) - m(\widehat{C}) = 45°$. Adunăm membru cu membru cele două egalităţi. Rezultă : $2m(\widehat{B}) = 135°$ ; $m(\widehat{B}) = \frac{135°}{2}$ apoi $m(\widehat{C}) = \frac{45}{2}$. Rezultă : $\frac{m(\widehat{B})}{m(\widehat{C})} = \frac{135}{2} \cdot \frac{2}{45°} = 3$.

**VI.G.22.** a)

$\triangle ADC \equiv \triangle ABE$, deoarece : (caz L.U.L.)
$\left\{ \begin{array}{l} AD \equiv AB \text{ ipoteză, construcţie} \\ AC = AE \text{ ipoteză, construcţie} \\ m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{BAE}) = 60° + \\ \quad + m(\widehat{BAC}) \end{array} \right.$

Rezultă : $DC \equiv BE$.

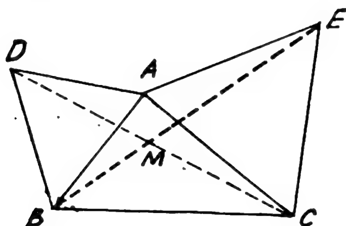



*Fig. VI.G.22.*

b) $\widehat{BMC}$ exterior $\triangle CME$ ; $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{MEC}) + m(\widehat{ECM}) = (60° - m(\widehat{AEB})) + (60° + m(\widehat{ACD})) = 120°$, deoarece $m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{ACD})$ conform punctului a).

**VI.G.23.** Dacă $m(\widehat{A}) = 90°$ atunci $D = A$, şi se contrazice ipoteza $D \in AC$.

Dacă $m(\widehat{A}) = 60°$ atunci $BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ şi contrazicem ipoteza, nemaiexistînd punctul $E \in AC$.

Dacă $m(A) > 90°$ atunci punctul $D$ se află pe prelungirea segmentului $AC$ şi contrazicem din nou ipoteza $D \in AC$.

Rămîne ca măsura unghiului $A$ să fie $0° < m(A) < 90°$ şi $m(\widehat{A}) = 60°$.

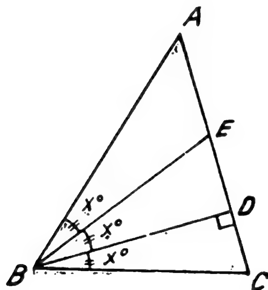



*Fig. VI.G.23.*

Din ipoteză $AB \equiv AC \Rightarrow m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$.

În $\triangle BCD$ : $m(\widehat{D})' \Rightarrow m(\widehat{C}) + m(\widehat{DBC}) = 90 \Rightarrow 3 \cdot x^\circ + x^\circ = 90^\circ$ ; $4x^\circ = 90^\circ$ ; $x^\circ = 90^\circ : 4$ ; $x^\circ = \frac{45^\circ}{2}$, deci : $m(B) = m(C) = \frac{135^\circ}{2}$; $m(A) = 180^\circ - 2 \cdot \frac{135^\circ}{2}$, adică : $m(A) = 45^\circ$.

**VI.G.24.**

1. $AB \equiv AC$ şi $BM \equiv AN \Rightarrow AM \equiv NC$.

$\triangle BNC = \triangle CMA$, deoarece : (caz L.U.L.)
$\begin{cases} BC = BC \\ m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 60^\circ \text{ (ipoteză)} \\ AM \equiv NC \end{cases}$

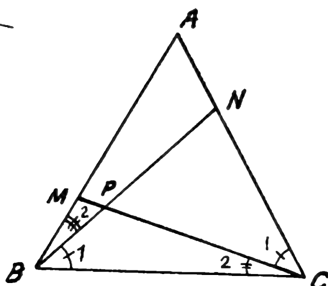



*Fig. VI.G.24.*

2. Din congruenţa precedentă rezultă : $m(\widehat{B_1}) = m(\widehat{C_1})$, dar $m(\widehat{C_1}) + m(\widehat{C_2}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{B_1}) + m(C_1) = 60^\circ$ şi cum unghiul $NPC$ este unghi exterior $\triangle BPC \Rightarrow m(NPC) = 60^\circ$.

Observaţie : Concluzia nr. 2) putea fi formulată astfel : „arătaţi că în ipoteza dată, măsura unghiului $NPC$ este constantă.

**VI.G.25.** a) $m(NPC) = 60^\circ$ (vezi problema VI.G.24.).

b) Fie punctul $R$ intersecţia prelungirilor segmentelor $MN$ şi $BC$. Deoarece $m(\widehat{NRC}) = 30^\circ$(ipoteză) atunci $\triangle RNC$ este dreptunghic în $N$ deoarece $m(\widehat{RCN}) = 60^\circ$ (ipoteză). Dar şi $\triangle MNA$ este dreptunghic în $N$ deoarece $m(AMN) = 30^\circ$ $(m(\widehat{AMN}) - m(\widehat{RMB}) = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$ şi $m(\widehat{MAN}) = 60^\circ)$.

În aceste condiţii, triunghiul dreptunghic $MNA$ are un unghi de 30°. Conform proprietăţii : „dacă într-un triunghi dreptunghic un unghi este de 30°, atunci cateta care se opune acestui unghi este jumătate din ipotenuză“, deducem că : (1) $AN = \frac{AM}{2}$. Cum $AN \equiv BM$ (ipoteză), rezultă (2)

$AN = \frac{AB - AN}{2}$. Ştim că o egalitate rămîne adevrată dacă mărim ambii ei membri de acelaşi număr de ori ; de exemplu să mărim ambii membri ai egalităţii (2) de două ori. Obţinem : (3) $2 \cdot AN = AB - AN$, adică (4) $3 \cdot AN = AB$ şi deci (5) $AN = \frac{AB}{3}$.

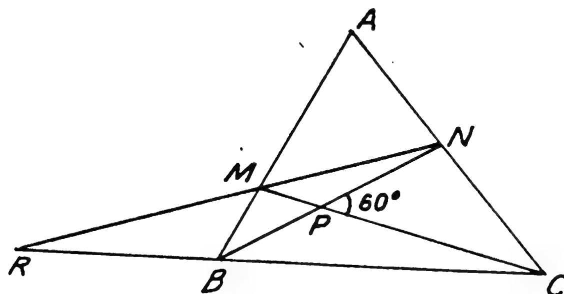



*Fig. VI.G.25.*

**VI.G.26.** a) În $\triangle$ dreptunghic $BAM$ : $m(\widehat{A_1}) = 90° - m(\widehat{M})$.

În $\triangle$ dreptunghic $CAN$ : $m(\widehat{A_2}) = 90° - m(\widehat{N})$.

Dar $m(\widehat{M}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$ (ipoteză) şi $m(\widehat{N}) = \frac{m(\widehat{BAC})}{2}$ (ipoteză).

Din toate aceste condiţii rezultă $m(\widehat{A_1}) + m(\widehat{A_2}) + m(\widehat{BAC}) = 90° - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} + 90° - \frac{m(\widehat{BAC})}{2} + m(\widehat{BAC}) = 180° = m(\widehat{MAN})$, deci $M$, $A$, $N$ coliniare.

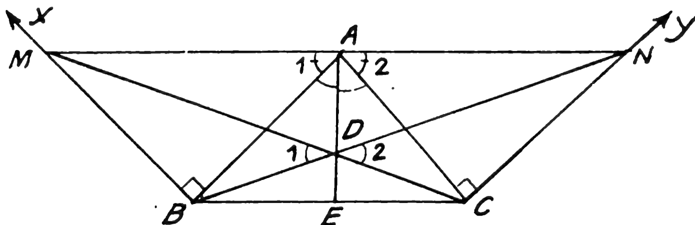



*Fig. VI.G.26.*

b)

$\triangle BMC \equiv \triangle CNB$, deoarece : (caz L.U.L.)
$\begin{cases} BC = BC \\ m(\widehat{MBC}) = m(\widehat{NCB}) \ (= 90° + \\ + m(\widehat{B}) = 90° + m(\widehat{C})) \\ MB \equiv NC \ (\triangle MBA = \triangle NCA, \\ \text{dreptunghice, catetă, unghi}) \end{cases}$

Rezultă : $MC = NB$, dar și $\widehat{BMC} \equiv \widehat{CNB}$ precum și $\widehat{BCM} \equiv \widehat{CBN}$.

c)

$\triangle MDB \equiv \triangle NCA$, deoarece : (caz U.L.U.)
$\begin{cases} \widehat{BMD} \equiv \widehat{CND} \text{ (demonstrat la punctul a))} \\ MB \equiv NC \text{ (demonstrat la punctul a))} \\ \widehat{MBD} \equiv \widehat{NCD} \end{cases}$

ca diferențe de unghiuri congruente ; $m(\widehat{MBD}) = m(\widehat{MBC}) - m(\widehat{NBC})$ și $m(\widehat{NCD}) = m(\widehat{NCB}) - m(\widehat{MCB})$ demonstrat.

Rezultă că : $BD = DC$ și ducînd $DE \perp BC$, deoarece $\triangle BDC$ este isoscel rezultă : $BE \equiv EC$. Deci în $\triangle DBC$, $DE$ este mediatoarea laturii $BC$. Dar și $\triangle ABC$ este isoscel, deci mediatoarea laturii $BC$ care este $DE$, trece și prin vîrful $A$. Ori mediatoarea $AE$ fiind și bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, urmează că $D \in AE$.

**VI.G.27.** a)

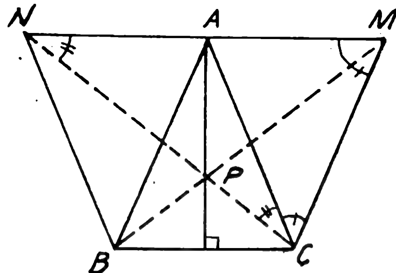



*Fig. VI.G.27.*

$\triangle AMC = \triangle ANB$, deoarece : (caz (L.U.L.)
$\begin{cases} AM \equiv AN \text{ (ip.)} \\ AB \equiv AC \text{ (ip.)} \\ \widehat{NAB} \equiv \widehat{MAC} \text{ pentru că :} \\ \quad \widehat{NAB} = \widehat{ABC} \text{ (alterne interne, secanta } AB) \text{ și} \\ \quad \widehat{MAC} = \widehat{ACB} \text{ (alterne interne, secanta } AC), \text{ ori} \\ \quad \widehat{ABC} = \widehat{ACB} \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

Rezultă $\widehat{ABN} \equiv ACM$ ; $\widehat{ANB} \equiv \widehat{AMC}$ şi în special $MC \equiv NB$.

b) $\triangle BMC \equiv \triangle BNC$, deoarece : (caz L.U.L.)

$\begin{cases} BC = BC \text{ (latura comună)} \\ MC \equiv NB \text{ (pct. a)} \\ \widehat{BCM} \equiv \widehat{CBN} \text{ pentru că :} \\ \quad m(\widehat{BCM}) = m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{ACM}) \\ \quad m(\widehat{CBN}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ABN}), \\ \quad \text{însă : } \widehat{ACB} \equiv \widehat{ABC} \text{ (ipoteză)} \\ \quad \widehat{ACM} \equiv \widehat{ABN} \text{ (pct. a)} \end{cases}$

Rezultă : $\widehat{BMC} = \widehat{CNB}$ ; $\widehat{MBC} \equiv \widehat{NCB}$ şi în special : $MB \equiv NC$.

c) În $\triangle MNP$, $PA$ este mediană (ipoteză). Cum $m(\widehat{ANB}) = m(\widehat{AMC})$ (pct. a) şi $m(\widehat{BNC}) = m(\widehat{BMC})$ (pct. b) $\Rightarrow$ $m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{NMP})$ (deoarece $m(\widehat{MNP}) = m(\widehat{ANB}) - m(\widehat{BNC})$ şi $m(\widehat{NMP}) = m(\widehat{AMC}) - m(\widehat{BMC})$). Deci : $\triangle MPN$ — isoscel $\Rightarrow$ $PN \equiv PM$, atunci mediana $PA$ este şi înălţime : $PA \perp MN$, dar $MN \parallel BC$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $AP \perp BC$.

d) Deoarece $AM \equiv AC$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\triangle AMC$ isoscel $\Rightarrow$ $\widehat{AMC} \equiv \widehat{ACM}$. Dar $AM \equiv AN$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $AN \equiv AC$ $\Rightarrow$ $\triangle ANC$ isoscel $\Rightarrow$ $\widehat{ANC} \equiv \widehat{ACN}$, dar $\widehat{ANC} \equiv \widehat{NCB}$ (alterne interne) deci $\widehat{ACN} \equiv \widehat{NCB}$ $\Rightarrow$ $NC$ bisectoarea unghiului $ACB$.

În $\triangle AMC$ avem $m(\widehat{MAC}) = 180° - 2 \cdot m(\widehat{M})$, iar în $\triangle NAC$, $m(\widehat{NAC}) = 180° - 2 \cdot m(\widehat{N})$.

Deci : $m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{NAC}) = 360° - 2(m(\widehat{M}) + m(\widehat{N}))$.

Cum $m(\widehat{MAC}) + m(\widehat{NAC}) = 180°$ (adiacente şi suplementare) $\Rightarrow$ $180° = 360° - 2(m(\widehat{M}) + m(N))$ $\Rightarrow$ $2(m(\widehat{M}) + m(N)) = 180°$, adică : $m(\widehat{M}) + m(\widehat{N}) = 90°$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{NPM}) = 90°$, deci $NC \perp MC$. Sau şi mai simplu : în $\triangle MNC$ avem : $2m(\widehat{M}) + 2m(\widehat{N}) = 180°$, deci $m(\widehat{M}) + m(\widehat{N}) = 90°$, adică $m(\widehat{MCN}) = 90°$. Rezultă : $NC \perp MC$.

**VI.G.28.** Să notăm pentru simplificare $m(\widehat{BMD}) = x°$. Cum $AM \equiv AE$ (ipoteză) rezultă că triunghiul $AME$ are două unghiuri congruente, adică şi $m(\widehat{AEM}) = x°$. Cum unghiurile $AEM$ şi $DEC$ sînt opuse la vîrf, rezultă $m(\widehat{DEC}) = x°$.

În $\triangle BDM$, $m(\widehat{D_1}) = 180° - (m(\widehat{B}) + x°)$. În $\triangle CDE$, $m(\widehat{D_2}) = 180° - (m(\widehat{C}) + x°)$. Cum $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$ din ipoteză, deducem că $m(\widehat{D_1}) \equiv m(\widehat{D_2})$. Dar unghiurile $D_1$ şi $D_2$ sînt suplementare, fiind şi congruente (demonstrat) rezultă că $m(\widehat{D_1}) = m(\widehat{D_2}) = 90°$, adică dreptele $MD$ şi $BC$ sînt perpendiculare, ceea ce este tot una cu $ME \perp BC$.

Observație : Condițiile din textul problemei : „se ia pe prelungirea laturii $AB$..." cît și „$E$ între $A$ și $C$" sînt esențiale pentru obținerea concluziei" „$ME \perp BC$". Verificați aceasta, rezolvînd problema : „Într-un triunghi $ABC$ ($AB \equiv AC$) se ia pe dreapta $AB$ segmentul $AM \equiv AE$ unde $E$ aparține dreptei $AC$. Să se arate că $ME \perp BC$ sau $ME \| BC$".

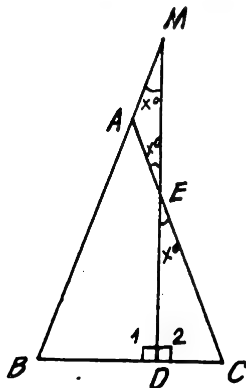



Fig. VI.G.28.

**VI.G.29.**

a) Notăm în $\triangle ABC$ $m(\widehat{B}) = x^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = 60^\circ + x^\circ$ ; cum $m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 180^\circ - (m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}))$, adică : $m(\widehat{C}) = 180^\circ - (x^\circ + x^\circ + 60^\circ) = 2 \cdot (60^\circ - x^\circ)$.

În $\triangle CAF$ : $m(\widehat{C_1}) = m\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right) = 60^\circ - x^\circ$ și $m(\widehat{A}) = 60^\circ + x^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{AFC}) = 180^\circ - (m(\widehat{C_1}) + m(\widehat{A})) = 180^\circ - (60^\circ - x^\circ + 60^\circ + x^\circ) = 60^\circ$. Deci : $m(\widehat{AFC}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{CFB}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow m(\widehat{CFK}) = 60^\circ \Rightarrow \triangle AFC = \triangle KFC$, (caz L.U.L.) $\Rightarrow AC \equiv CK$ și $m(\widehat{C_1}) = m(\widehat{C_2}) \Rightarrow CF \perp AK$ (în triunghiul isoscel, bisectoarea unghiului necongruent este și înălțime relativă bazei triunghiului).

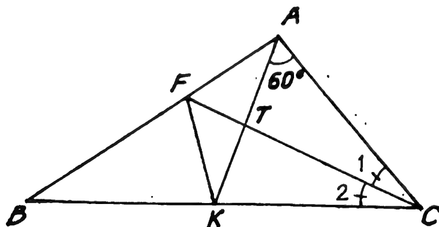



Fig. VI.G.29.

b) Din $CT \perp AK$, în $\triangle ACK$ $(AC = CK)$ $\Rightarrow$ $AT \equiv TK$. (În orice triunghi isoscel bisectoarea unghiului necongruent este înălţimea şi mediana relativă bazei triunghiului).

c) În $\triangle ATF$ $(m(\widehat{ATF}) = 90^\circ)$ ; $(m(\widehat{AFT}) = 60^\circ)$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{FAT}) = 30^\circ$.

**VI.G.30.**

a) În $\triangle BIC$ : $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - (m(\widehat{B_2}) + m(\widehat{C_2}))$ ; $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - m\left[\left(\frac{\widehat{B}}{2}\right) + m\left(\frac{\widehat{C}}{2}\right)\right]$ ; $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}{2}$.

În $\triangle ABC$ : $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 90^\circ$.

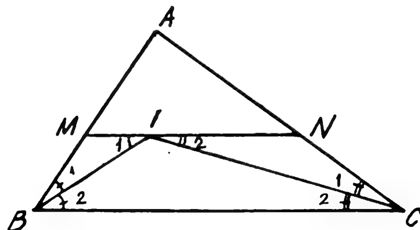



*Fig. VI.G.30.*

Din cele afirmate pînă acum rezultă $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, deci : $m(BIC) = 135^\circ$.

b) Din $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{m(\widehat{B}) + m(\widehat{C})}{2}$ şi faptul că în $\triangle ABC$ : $m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ - m(\widehat{A})$, rezultă $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - \frac{180 - m(\widehat{A})}{2}$ ; $m(\widehat{BIC}) = 180^\circ - 90^\circ + \left(\frac{m(\widehat{A})}{2}\right)$ ; deci : $m(\widehat{BIC}) = 90^\circ + \left(\frac{m(\widehat{A})}{2}\right)$.

c) $MI \parallel BC$ şi secanta $BI \Rightarrow \widehat{I_1} \equiv \widehat{B_2}$ (alterne interne) dar $\widehat{B_2} \equiv \widehat{B_1}$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{I_1} = \widehat{B_2} \Rightarrow \triangle MBI$ — isoscel şi anume $MB \equiv MI$. (1)

$NI \parallel BC$ şi secanta $IC \Rightarrow \widehat{I_2} \equiv \widehat{C_2}$ (alterne interne) dar $\widehat{C_2} \equiv \widehat{C_1}$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{I_2} \equiv \widehat{C_1} \Rightarrow \triangle INC$ — isoscel şi anume $IN \equiv NC$. (2)

Adunăm (1) şi (2) : $MB + NC = MI + IN$ ori $MI + IN = MN$.

În concluzie : $MB + NC = MN$.

d) $AM + AN + MN = AN + AM + NI + IN = (AM + MI) + (AN + NI)$ dar $MI \equiv MB$ (din 1) şi $NI \equiv NC$ (din 2) (de la punctul c).

Rezultă : $AM + AN + MN = (AM + MB) + (AN + NC) = AB + AC = 20\ \text{cm} + 15\ \text{cm} = 35\ \text{cm}$.

**VI.G.31.** a) Din ipoteză $AB \equiv AC$. Tot din ipoteză triunghiurile dreptunghice şi isoscele $BAD$ şi $CAE$ sînt congruente, deoarece : $AB \equiv AD \equiv$ $\equiv AC \equiv AE$, iar $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAE}) = 90°$ (construcţie). Deducem că $\triangle ADE$ este isoscel şi anume $AD \equiv AE$ adică :

1) $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{AED})$, (proprietate caracteristică a triunghiurilor isoscele) dar şi :

2) $m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{CEA}) = 45°$.

Adunînd membru cu membru cele două egalităţi deducem :

3) $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{CED})$ şi deci triunghiul $FDE$ este isoscel şi anume : $FD = FE$.

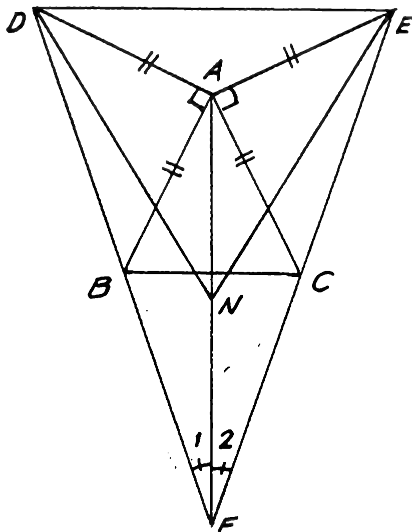



*Fig. VI.G.31.*

b) Cum $FD \equiv FE$, comparăm triunghiurile $DAF$ şi $EAF$. Constatăm că ele sînt congruente (L.L.L.). Cum în triunghiuri congruente la laturi congruente se opun unghiuri respectiv congruente deducem că $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$ (vezi desenul şi notaţia). Urmează ca în triunghiul isoscel $FDE$, $FA$ este bisectoarea unghiului $DFE$ adică este şi înălţimea relativă laturii $DE$ (proprietatea bisectoarei unghiului necongruent dintr-un triunghi isoscel). În concluzie $FA \perp DE$.

c) Să evaluăm unghiurile triunghiului $NDF$. Procedăm de exemplu astfel :

Triunghiul $FBC$ este isoscel deoarece $FB \equiv FC$ (au lungimile egale : $FB = FD - BD$ iar $FC = FE - CE$ demonstrat în etapele precedente). Urmează că: $m(\widehat{CBF}) = 180° - (60° + 45) = 180° - 105° = 75° = m(\widehat{BCF})$.

Deducem : $m(\widehat{DFE}) = 180° - 150° = 30°$. Cum $FA$ este bisectoarea $\widehat{DFE}$ (demonstrat) rezultă $m(\widehat{DFN}) = 15°$.

Măsura unghiului $DNF$ o calculăm astfel : triunghiurile $DNF$ și $ENF$ sînt congruente (L.L.L. din construcţie şi demonstraţiile precedente). Aşadar $\widehat{DNF} \equiv \widehat{ENF}$ şi atunci : $2 \cdot m(\widehat{DNF}) = 360° - 60° = 300°$ (suma măsurilor tuturor unghiurilor adiacente două cîte două desenate cu vîrful în jurul unui punct este egală cu 360°). Urmează că $m(\widehat{DNF}) = 150°$.

Rezultă imediat şi măsura ultimului unghi al $\triangle$ NDF : $m(\widehat{NDF}) = 180° - (150° + 15°) = 180° - 165° = 15°$.

Aşadar $\triangle NDF$ este isoscel şi anume $DN \equiv NF$.

Cum $\triangle DNE$ este echilateral şi are perimetrul egal cu 21 cm (ipoteză), rezultă $DN = 7$ cm şi deci $NF = 7$ cm.

**VI.G.32.**

Notăm în $\triangle$ dreptunghic $ABC$ $m(\widehat{A}) = 90°$, $m(\widehat{B}) = x°$ şi $m(\widehat{C}) = y° \Rightarrow x° + y° = 90°$. În $\triangle MDB$ isoscel (într-un $\triangle$ dreptunghic mediana relativă ipotezei este jumătate din ipoteză) : $DM \equiv BM$, unghiurile congruente sînt $\widehat{MBD} \equiv \widehat{MDB}$ $(= x°)$. Unghiul $DMA$ este unghi exterior $\triangle DMB$. Distingem următoarele cazuri :

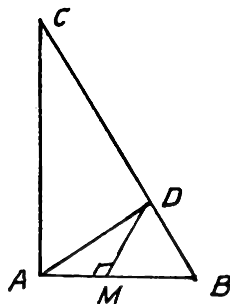



*Fig. VI.G.32.*

a) Discuţie prealabilă : Dacă $m(\widehat{DMA}) = 90° \Rightarrow m(\widehat{DMA}) = 2x° = 90° \Rightarrow x° = 45° \Rightarrow AC \equiv AB$.

b) Dacă $m(\widehat{DMA}) > 90° \Rightarrow 2x° > 90° \Rightarrow x° > 45° \Rightarrow AC > AB$.

c) Dacă $m(\widehat{DMA}) < 90° \Rightarrow x° < 45° \Rightarrow AC < AB$.

Cum în ipoteză $m(\widehat{DMA}) = 120° > 90°$ rezultă că $AC > AB$.

Rezolvare : În triunghiul dreptunghic $ADB$ $m(\widehat{D}) = 90°$, $DM$ este mediană (ipoteză). Deducem că $DM = \frac{AB}{2}$, adică $DM = MA = MB$ şi

deci triunghiul $MDB$ este isoscel. Cum $m(\widehat{AMD}) = 120°$ (ipoteză), rezultă că $m(\widehat{DMB}) = 60°$ (unghiurile $AMD$ şi $DMB$ fiind adiacente şi suplementare). Ori, un triunghi isoscel cu un unghi de 60° este echilateral, deci $m(\widehat{B}) = 60°$. În triunghiul dreptunghic $ABC$, unghiurile $B$ şi $C$ sînt complementare, rezultă $m(\widehat{C}) = 30°$.

Triunghiul $ADC$ fiind dreptunghic (ipoteză) şi avînd măsură unghiului $C$ de 30° (demonstrat), rezultă că în acest triunghi latura $AD$ care se opune unghiului de 30° $\widehat{C}$ este jumătate din ipotenuza $AC$, deci $AD = \frac{AC}{2}$. Cum $AC = 10$ cm (ipoteză) urmează că $AD = 5$ cm.

**VI.G.33.** Notăm de exemplu triunghiul $ABC$ şi presupunem $m(\widehat{A}) = 50°$ iar $m(\widehat{B}) = 60°$. Rezultă $m(\widehat{C}) = 70°$. Construim $CD$, bisectoarea unghiului $C$ (fiind unghiul cu măsura cea mai mare — ipoteză) şi apoi construim o paralelă la bisectoarea $CD$ care să treacă prin punctul $A$ (vîrful $A$ fiind vîrful unghiului cu măsura cea mai mică — ipoteză). Notăm această dreaptă $XY$.

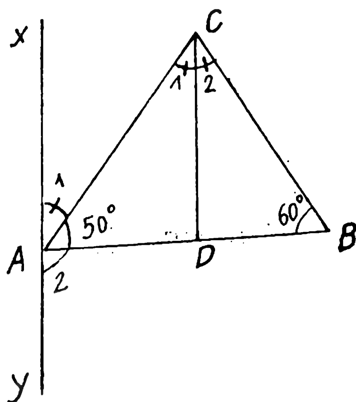



*Fig. VI.G.33.*

Se observă că : $\widehat{C_1} \equiv \widehat{A_1}$ (unghiuri alterne interne ; secantă : dreapta $AC$, paralelele : dreptele $XY$ şi $CD$, ipoteză). Deducem $m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{C_1}) = 35°$. Aşadar paralela $XY$ formează cu latura $AC$ un unghi de 35°. Rezultă imediat : $m(\widehat{A_2}) = 180° - (50° + 35°) = 180° - 85° = 95°$ (în jurul unui punct şi de o parte a unei drepte care trece prin punct sînt 180°). Aşadar paralela $XY$ formează cu latura $AB$ un unghi a cărui măsură este de 95° (unghi obtuz) sau 85° (unghi ascuţit). Deoarece $XY$ nu este paralelă cu $BC$, unghiul ascuţit dintre $XY$ şi $BC$ este egal cu $180° - (60° + 85°) = 180° - 145° = 35°$.

**VI.G.34.** a)

$\triangle AEM \equiv \triangle AEP$, deoarece : (cazul L.U.L.) $\begin{cases} m(\widehat{PEA}) = m(\widehat{MEA}) = 90^\circ \\ PE \equiv EM \text{ (ipoteză)} \\ AE = AE \text{ (latură comună)} \end{cases}$

Rezultă $AM \equiv AP$ (1) dar şi $\widehat{MAE} \equiv \widehat{PAE}$.

$\triangle AMF \equiv \triangle AQF$, deoarece : (cazul L.U.L.) $\begin{cases} m(\widehat{AFM}) = m(\widehat{AFQ}) = 90^\circ \\ MF \equiv FQ \text{ (ipoteză)} \\ AF = AF \text{ (latură comună)} \end{cases}$

Rezultă $AM \equiv AQ$ (2) dar şi $\widehat{MAF} \equiv \widehat{QAF}$.



Fig. VI.G.34.

Din (1) şi (2) $\Rightarrow AP \equiv AQ$. (Tranzitivitatea relaţiei de congruenţă), aşadar $\triangle APQ$ este isoscel.

b) Ştim că $\widehat{MAE} \equiv \widehat{PAE}$ şi $\widehat{MAF} \equiv \widehat{QAF}$, demonstrat $\Rightarrow m(\widehat{PAQ}) = 2 \cdot m(\widehat{BAC})$ ; $m(\widehat{APQ}) = m(\widehat{AQP}) = \frac{180^\circ - m(\widehat{PAQ})}{2} = 90^\circ - \frac{m(\widehat{PAQ})}{2} = 90^\circ - m(\widehat{BAC})$.

c) $\triangle APQ$ este isoscel (demonstrat). Presupunem $\triangle APQ$ echilateral $\Rightarrow m(\widehat{PAQ}) = 60^\circ \Rightarrow m(\widehat{APQ}) = m(\widehat{AQP}) = \frac{(180^\circ - 60^\circ)}{2} = 60^\circ = 90^\circ - m(\widehat{BAC}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$.

d) $P$, $A$, $Q$ coliniare dacă $m(\widehat{PAQ}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$ (din demonstraţia $m(\widehat{PAE}) = m(\widehat{MAE})$ şi $m(\widehat{MAF}) = m(\widehat{QAF})$. Deci $m(\widehat{PAQ}) = 2m(\widehat{BAC}) \Rightarrow 180^\circ = 2 \cdot m(\widehat{BAC}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$.

e) $PQ$ este minimă cînd $AP \equiv AM \equiv AQ$ este minimă. Aceasta se realizează cînd $AM \perp BC$, deci atunci cînd în $\triangle BAC$, $M$ este piciorul înălţimii duse din $A$ pe latura $BC$. Altă rezolvare : În $\triangle PMQ$, $EF$ este linie mijlocie ($PE \equiv EM$ şi $QF \equiv FM$ din ipoteză) şi deci $EF = \frac{PQ}{2}$. Deci minimul lui $PQ$ are loc odată cu al lui $EF$. Însă $EF \equiv AM$ ($AEMF$ dreptunghi, diagonale ale dreptunghiului) $\Rightarrow$ $AM$ minimă cînd $AM \perp BC$.

**VI.G.35.** a) Din $AF \perp BC$ şi $M \in AF$ deducem : $AF$ este şi bisectoarea lui $\widehat{BAC}$ ($AB \equiv AC$ ipoteză) $\Rightarrow$ $m(\widehat{FAE}) = 20° + 60° = 80° = m(\widehat{FAD})$ şi deci :

$\triangle ADM \equiv \triangle AEM$, deoarece : (cazul L.U.L.)
$$\begin{cases} m(\widehat{DAF}) = m(\widehat{FAE}) \ (= 80°) \\ AM = AM \text{ (latură comună)} \\ AD \equiv AE \text{ (ipoteză)} \end{cases}$$

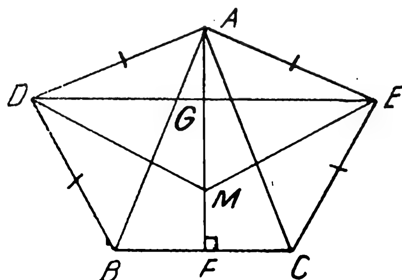



*Fig. VI.G.35.*

Rezultă că $DM \equiv ME$.

b) Cum $\triangle ADE$ — isoscel (ipoteză) şi $m(\widehat{DAF}) = 80° = m(\widehat{FAE})$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ în $\triangle DAE$ $AF$ — bisectoarea unghiului $DAE$ dar şi înălţimea relativă laturii $DE$, deci $AF \perp DE$. Dar $AF \perp BC$ (punctul a). Rezultă $DE \parallel BC$.

**VI.G.36.** Din ipotezele : $\{F\} = BE \cap CD$ şi $AB \equiv AC$ şi $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{ADE} \equiv$ $\equiv \widehat{AED}$ (corespondente) adică $\triangle ADE$ este isoscel şi anume : $m(\widehat{ADE}) \equiv$ $\equiv m(AED) \Rightarrow AE \equiv AD \Rightarrow EC \equiv DB$ (diferenţă de segmente congruente).

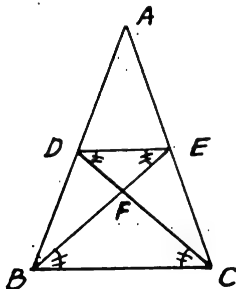



*Fig. VI.G.36.*

Aşadar $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$, deoarece : (cazul L.U.L.)

$DB \equiv EC$ (demonstrat)
$BC = BC$ (latură comună)
$\widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB}$ (triunghiul $\triangle ABC$ isoscel — ipoteză)

Rezultă că $\widehat{BDC} \equiv \widehat{CEB} \Rightarrow \widehat{FDE} \equiv \widehat{FED}$ $(m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{BDE}) - m(\widehat{BDC})$, iar $m(\widehat{FED}) = m(\widehat{CED}) - m(\widehat{CEB})) \Rightarrow \triangle FDE$ isoscel şi anume $FD \equiv FE$. Cum $\widehat{FED} \equiv \widehat{FBC}$ (alt. int.) şi $\widehat{FDE} \equiv \widehat{FCB}$ (alt. int.) rezultă că şi $\triangle FBC$ isoscel şi anume $FB \equiv FC$.

Observaţie : Triunghiurile $BFC$ şi $DFE$ sînt isoscele şi în cazul în care punctele $D$ şi $E$ sînt luate pe prelungirile laturilor $AB$ şi $AC$, astfel încît $DE \parallel BC$.

**VI.G.37.** a) $PI \equiv RI \equiv QI$ (distanţele de la un punct de pe bisectoare la laturile unghiului sînt congruente). În $\triangle BIC$, $m(\widehat{B_2}) + m(\widehat{C_2}) = 180° - 120° = 60° \Rightarrow$ în $\triangle ABC$, $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) = 120° \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180° - 120° = 60°$ ; $m(\widehat{A_1}) = m(\widehat{A_2}) = 30° \Rightarrow$ în triunghiul dreptunghic $AIP$ (ipoteză) $PI = \left(\frac{12}{2}\right) = 6$ cm, ca fiind cateta ce se opune unghiului de 30°. Aşadar $PI = RI = QI = 6$ cm.

b) $\triangle BMI$ — isoscel ptc. din $\widehat{B_1} \equiv \widehat{B_2}$ (ipoteză) şi $\widehat{B_2} = \widehat{I_1} \Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{I_1}$ (ipoteză) $\Rightarrow MB \equiv MI$ (1) dar şi $\triangle NCI$ este isoscel căci $\widehat{C_1} \equiv \widehat{C_2}$ (ipoteză) şi $\widehat{C_2} \equiv \widehat{I_2}$ (alt. int. ipoteză) $\Rightarrow \widehat{C_1} \equiv \widehat{I_2} \Rightarrow NC \equiv NI$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă $MB + NC = MN$.

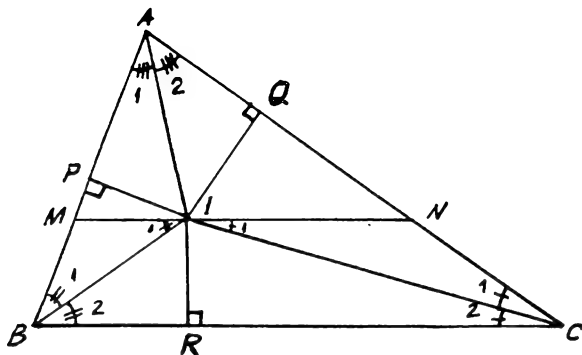



*Fig. VI.G.37.*

**VI.G.38.** a) În $MDN$ avem $DA$ — mediană (ipoteză), apoi deoarece în $\triangle BAC$, $MN$ este bisectoarea exterioară a unghiului $BAC$ (ipoteză), urmează că este perpendiculară pe dreapta $AD$, care în $\triangle BAC$ este bisectoarea interioară a unghiului $BAC$ (proprietate cunoscută). În aceste condiţii $DA$ este în $\triangle MDN$, mediană şi înălţime $\Rightarrow \triangle MDN$ isoscel (proprietate) şi anume $MD \equiv ND$.

b)

$\triangle AMB \equiv \triangle ANE$, deoarece : (caz U.L.U.)

$$\left\{\begin{array}{l} - m(\widehat{AMB}) = m(\widehat{AND}) \text{ conform punctului precedent} \\ - AM = AN \text{ (ipoteză)} \\ - m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{NAE}) = \\ = 90^\circ - m(\widehat{BAC}) : 2 \end{array}\right\}$$

Din această congruență ne interesează în mod special $AB \equiv AE$.

c) În $\triangle ABE$ avem $AB \equiv AE$ (de la punctul b) și $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAE})$ — ipoteză, deci în $\triangle$ isoscel $ABE$ bisectoarea $AD$ este și înălțime : $AD \perp BE$.

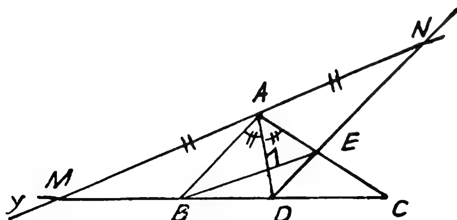



*Fig. VI.G.38.*

d) Din $AD \perp MN$ și $AD \perp BE \Rightarrow BE \| MN$ conform prepoziției : dacă două drepte intersectate de o secantă formează unghiuri interne și de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sînt paralele.

**VI.G.39.** a) Notăm de exemplu $m(\widehat{B}) = x^\circ \Rightarrow m(\widehat{C}) = 2x^\circ$ (ipoteză). Din $EF$ — bisectoarea $\widehat{AED} \Rightarrow m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{AED}) : 2$ dar $m(\widehat{AED}) \equiv m(\widehat{ACB})$ (corespondente, ipoteză). Cum $m(\widehat{ECD}) = m(\widehat{ACD}) : 2 = x^\circ \Rightarrow m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{ECD}) = x^\circ \Rightarrow EF \| DC$.

b) În $\triangle BDC$, $m(\widehat{BDC}) = 180^\circ - 2x^\circ$ (ipoteză).

În $\triangle DEC$, $m(\widehat{DEC}) = 180^\circ - 2x^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{BDC} \equiv \widehat{DEC}$. Din $EF \| DC$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{ADC} \equiv \widehat{AFE}$ — corespondente.

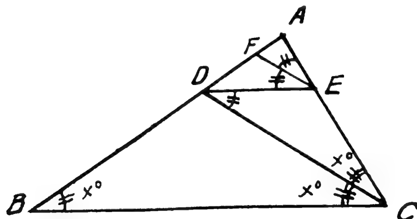



*Fig. VI.G.39.*

c) În $\triangle DBC$ avem : $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{ACB}) : 2 = m(\widehat{DCB}) \Rightarrow \triangle DBC$ — isoscel.

În $\triangle EDC$ avem : $m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{ACB}) : 2 = m(\widehat{AED}) : 2 = m(\widehat{FED}) = m(\widehat{EDC})$ (alterne interne) $\Rightarrow \triangle EDC$ isoscel.

În $FDE$ : $m(\widehat{FED}) = m(\widehat{AED}) : 2 = x°$. Dar $m(\widehat{FDE}) = m(\widehat{ABC}) = x°$ (corespondente). Rezultă deci : $\widehat{FED} \equiv \widehat{FDE} \Rightarrow \triangle FDE$ — isoscel.

**VI.G.40.** $\triangle A'A''B'$ — isoscel ; deoarece : $A'A'' = AB$ ($\triangle ABA'' \equiv \triangle A''A'A$ — U.L.U., latura $AA''$ fiind latura comună şi din care rezultă $A'A'' \equiv AB$ şi $AA' \equiv BA''$) şi $A''B' = BB' - BA'' = AC - BC = AB \Rightarrow A'A'' \equiv A''B'$, $\Rightarrow m(\widehat{A'B'A''}) = m(\widehat{B'A'A''})$.

Fig. VI.G.40.

Apoi, $\triangle C'C''B'$ — isoscel ; deoarece : $C'C'' = BC$ ($\triangle BCC' \equiv \triangle C''C'B$ — U.L.U. — latura comună fiind $BC'$. Din această congruenţă rezultă $C'C'' \equiv BC$ şi $BC'' \equiv CC'$) şi $C''B' = BB' - BC'' = AC - CC' = AC - AB = BC \Rightarrow C'C'' = C''B' \Rightarrow m(\widehat{C'B'C''}) = m(\widehat{B'C'C''})$. Dar $m(\widehat{A'B'A''}) = m(\widehat{B'A'A''}) = m(\widehat{B'A'C'}) + m(\widehat{C'A'A''})$ şi $m(\widehat{C'B'C''}) = m(\widehat{B'C'C''}) = m(\widehat{B'C'A'}) - m(\widehat{A'C'C''})$.

---

Evaluăm suma : $m(\widehat{A'B'A''}) + m(\widehat{C'B'C''}) = m(\widehat{B'A'C'}) + m(\widehat{B'C'A'})$ ($\widehat{C'A'A''} \equiv \widehat{A'C'C''}$ — alterne interne).

$m(\widehat{A'B'C'}) = m(\widehat{B'A'C'}) + m(\widehat{B'C'A'}) \Rightarrow m(\widehat{A'B'C'}) = 90°$.

Dacă punctul $A$ se găseşte între $B$ şi $C$, propoziţia rămîne adevărată.

Triunghiurile isoscele sînt : $\triangle C'C''A'$ şi $B'B''A'$ — în continuare, analog cu precedenta.

**VI.G.41.**

$\triangle MDB \equiv \triangle MDC$, deoarece : (caz C.C.)
- $MD = MD$
- $BD \equiv DC$ (în $\triangle ABC$ isoscel (ipoteză) $AD$ — înălţime şi mediană)
- $m(\widehat{MDB}) = m(\widehat{MDC}) = 90°$

În $\triangle MDB: DN$ — înălțime; în $\triangle MDC: DP$ — înălțime, iar $\triangle MDB \equiv \triangle MDC$ (demonstrat) $\Rightarrow DN \equiv DP$ (înălțimi corespunzătoare ipotenuzelor în triunghiuri dreptunghice congruente).

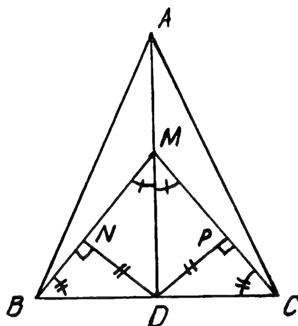



*Fig. VI.G.41.*

RECIPROCA : Fie $M$ un punct de pe înălțimea $AD$ a unui triunghi $ABC$ și distanțele $DN$ și $DP$ la $BM$ și respectiv CM. Știind că $DN \equiv DP$ să se demonstreze că $\triangle ABC$ este isoscel.

Demonstrație :

$\triangle MDN \equiv \triangle MDP$, deoarece : (caz I.C.)
$$\begin{cases} m(\widehat{MND}) = m(\widehat{MPD}) = 90° \\ MD = MD \\ DN \equiv DP \text{ — ipoteză} \end{cases}$$

Rezultă : $\widehat{BMD} \equiv \widehat{CMD} \Rightarrow$ (1) $\widehat{MBD} \equiv \widehat{MCD}$ (complementele lor în triunghiurile dreptunghice $MBD$ respectiv $MCD$ fiind congruente.

(2) $\widehat{AMB} \equiv \widehat{AMC}$ (suplementele lor fiind unghiurile congruente $BMD$ și $CMD$).

Din (1) și (2) rezultă că :

$\triangle AMB \equiv \triangle AMC$, deoarece : (caz L.U.L.)
$$\begin{cases} AM = AM \\ BM \equiv MC \ (\triangle MBC \text{ — isoscel din (1))} \\ \widehat{AMB} \equiv \widehat{AMC} \ \text{(din (2))} \end{cases}$$

Rezultă : $AB \equiv AC$, deci $\triangle ABC$ — isoscel.

**VI.G.42.** DIRECTA : În patrulaterul $AFEG$ avem $m(\widehat{A}) + m(\widehat{G}) + m(\widehat{E}) + m(\widehat{F}) = 360°$. Dar din ipoteză : $m(\widehat{A}) = 90°$; $m(\widehat{G}) = 90°$; $m(\widehat{F}) = 90° \Rightarrow m(\widehat{E}) = 90°$.

În $\triangle AEE' : AF \perp EE'$ și $E'F \equiv FE$ definiția simetricului unui punct față de o dreaptă (ipoteză) $\Rightarrow \triangle AEE'$ isoscel. Notăm $m(\widehat{AE'E}) = m(\widehat{AEE'}) = x°$. (1)

Apoi în $\triangle AEE''$ avem : $AG \perp EE''$ şi $EG \equiv GE''$ (analog cu precedenta) $\Rightarrow$ $\triangle AEE''$ — isoscel. Notăm : $m(\widehat{AEG}) = m(\widehat{AE''G}) = y^\circ$. (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $m(\widehat{E'EE''}) = x^\circ + y^\circ$. Dar $m(\widehat{E'EE''}) = 90^\circ$ (demonstrat) $\Rightarrow$ $x^\circ + y^\circ = 90$. Evaluăm $m(\widehat{EAE''}) + m(\widehat{EAE'}) = (180 - 2x^\circ) + (180^\circ - 2y^\circ) = 360 - 2(x^\circ + y^\circ)$. Cum $x^\circ + y^\circ = 90^\circ$ (demonstrat) rezultă : $m(\widehat{EAE''}) + m(\widehat{EAE'}) = 180^\circ \Rightarrow$ punctele $E'$, $A$, $E''$ sînt coliniare.

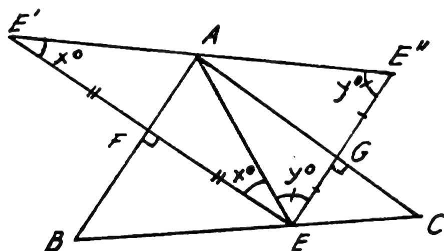



*Fig. VI.G.42.*

RECIPROCA : Ştim din propoziţia directă că $\triangle AEE'$ — isoscel şi anume : $m(\widehat{AE'E}) = m(\widehat{AEE'}) = x^\circ$ şi $\triangle AEE''$ — isoscel şi anume : $m(\widehat{AE''E}) \equiv m(\widehat{AEE''}) = y^\circ$, iar despre punctele $E'$, $A$, $E''$ — coliniare reciprocei (ipoteză).

În $\triangle E'EE''$, $m(\widehat{E'EE''}) + m(\widehat{EE''E'}) + m(\widehat{E'EE''}) = 180^\circ$. Şi folosind notaţiile simplificatoare : $x^\circ + y^\circ + x^\circ + y^\circ = 180^\circ$ ; $2x^\circ + 2y^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ $\Rightarrow x^\circ + y^\circ = 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{E'EE''}) = 90^\circ$.

În patrulaterul $AFEG$ : $m(\widehat{A}) + m(\widehat{F}) + m(\widehat{E}) + m(\widehat{G}) = 360^\circ$, sau : $m(\widehat{A}) + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow m(\widehat{A}) = 90^\circ$, şi deci $\triangle ABC$ este dreptunghic în $A$.

**VI.G.43.** Rezolvarea I :

Vom construi $\widehat{B}$ şi vom presupune $m(\widehat{B}) = x^\circ$ ; apoi $\widehat{A}$ şi conform ipotezei $m(\widehat{A}) = 2x^\circ$. Bisectoarea unghiului $\widehat{A}$, determină $\triangle ADB$ — isoscel (ipoteză) şi anume :

(1) $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{BAD}) = x^\circ$. Cum $DE \parallel AB$ (ipoteză), rezultă că $\widehat{ABD} \equiv \widehat{EDC}$ (unghiuri corespondente congruente) şi deci :

(2) $m(\widehat{EDC}) = x^\circ$. Pe de altă parte $\widehat{ADC}$ este unghi exterior triunghiului $ADB$ şi deci :

(3) $m(\widehat{ADC}) = 2x^\circ$.

Din (2) şi (3) rezultă că $DE$ este bisectoarea unghiului $ADC$. Aşadar $DE$ fiind mediană în $\triangle ADC$ (ipoteză) dar şi bisectoare (demonstrat), rezultă că $\triangle ADC$ este isoscel (conform proprietăţii caracteristice : „dacă

într-un triunghi o mediană este şi bisectoarea, atunci triunghiul este isoscel“) şi anume $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ACD}$, deci :

(4) $m(\widehat{C}) = x^\circ$. Scriind că în $\triangle ABC$ suma unghiurilor este egală cu $180^\circ$ obţinem : $m(\widehat{B}) + m(\widehat{A}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$, adică $x^\circ + 2x^\circ + x^\circ = 180^\circ$ şi deci $4x^\circ = 180^\circ$ ; urmează ca :

(5) $x^\circ = 45^\circ$. În concluzie măsurile unghiurilor triunghiului $ABC$ sînt : $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ; $m(\widehat{B}) = 45^\circ$ ; $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic şi isoscel).

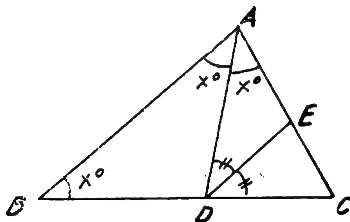



*Fig. VI.G.43.*

Observaţie : Cunoştinţele folosite în rezolvarea problemei au fost, în ordinea învăţată : proprietăţi ale triunghiurilor isoscele ; despre drepte paralele intersectate de o secantă ; despre suma unghiurilor unui triunghi.

Problema se poate rezolva mult mai simplu folosind şi alte cunoştinţe cum ar fi : teorema liniei mijlocii într-un triunghi (teorema directă şi reciprocă) sau proprietatea medianei relativă ipotenuzei dintr-un triunghi dreptunghic (teorema directă şi reciprocă). Astfel :

Rezolvarea a II-a :

În $\triangle ABC$, $DE$ fiind paralelă cu $AB$ şi $E$ fiind mijlocul laturii $AC$ (ipoteză) rezultă că este linie mijlocie (reciprocă). Deducem că $BD \equiv DC$. Urmează că în $\triangle ABC$, $AD$ este bisectoarea (ipoteză) şi mediană (demonstrat) deci $\triangle ABC$ este isoscel şi anume $AB \equiv AC$ (proprietate caracteristică) aşadar $\widehat{B} \equiv \widehat{C}$. Cum $m(\widehat{B}) = x^\circ$ rezultă că şi $m(\widehat{C}) = x^\circ$. $m(\widehat{A})$ fiind $2x^\circ$ (ipoteză) deducem prin calcul că $x = 45^\circ$. Aşadar $\triangle ABC$ are măsurile unghiurilor astfel : $m(\widehat{A}) = 90^\circ$ ; $m(\widehat{B}) = 45^\circ$ ; $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic şi isoscel).

Rezolvarea a III-a :

Triunghiul $ADB$ este isoscel (ipoteză) şi anume : (1) $AD = DB$. Am văzut că $ED$ este linie mijlocie în $\triangle ABC$ (prin reciprocă) adică : (2) $DB \equiv DC$. Prin tranzitivitatea relaţiei de congruenţă deducem : (3) $AD \equiv DB = DC$. Conform reciprocei : „dacă într-un triunghi lungimea medianei este jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic şi anume unghiul drept este opus laturii pe care se duce mediana“) rezultă că $\triangle ABC$ este dreptunghic în $\widehat{A}$, deci $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 45$, $m(\widehat{C}) = 45^\circ$ ($\triangle ABC$ este dreptunghic şi isoscel).

**VI.G.44.** a) Fie $MP \cap AC = \{R\}$. În $\triangle ANR$ există $m(\widehat{NAR}) = 60°$ (ipoteză); $\widehat{ANR} \equiv \widehat{MNB}$ (opusă la vîrf). Din $MB \equiv BD$ şi $BD = \frac{AB}{2} = BN$ (ipotezele problemei) $\Rightarrow BN \equiv MB \Rightarrow$ în $\triangle MNB$ isoscel, $m(\widehat{MNB}) = \frac{180° - m(\widehat{MBN})}{2} = \frac{180° - (180° - 60°)}{2} = 30° \Rightarrow m(\widehat{ANR}) = 30°$. Atunci $m(\widehat{ARN}) = 180° - (60° + 30° = 90° \Rightarrow MN \perp AC$.

b) În $\triangle AMC$, $AD \perp MC$ (ipoteză) şi $MR \perp AC$ (demonstrat) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \{P\} = MR \cap AD$ — ortocentrul $\triangle$-ului $AMC$, $\Rightarrow CP \perp AM$.

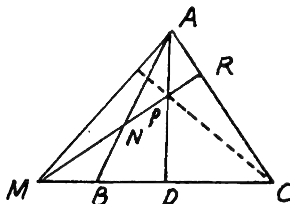


*Fig. VI.G.44.*

**VI.G.42.** Considerăm :

$\triangle DBC \equiv \triangle CAD$, deoarece : (caz L.L.L.)
$\begin{cases} DC \text{ — latură comună} \\ DB \equiv AC \text{ (ipoteză)} \\ BC \equiv AD \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

Rezultă : $\widehat{BDC} = \widehat{ACD}$ (1).

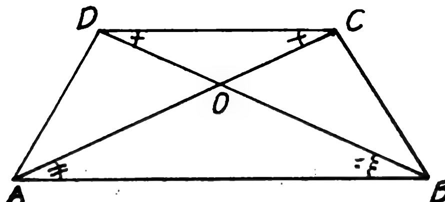


*Fig. VI.G.45.*

$\triangle DAB \equiv \triangle CBA$, deoarece : (caz L.L.L.)
$\begin{cases} AB \text{ — latură comună} \\ DB \equiv CA \text{ (ipoteză)} \\ AD \equiv BC \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

Rezultă : $\widehat{DBA} \equiv \widehat{CAB}$ (2).

Notînd cu $O$ intersecţia diagonalelor, avem : $\widehat{DOC} \equiv \widehat{AOB}$ (unghiuri opuse la vîrf). În $\triangle DOC$ — isoscel (1), $m(\widehat{DOC}) = 180° - 2m(\widehat{DCO})$. În $\triangle AOB$ — isoscel (2), $m(\widehat{AOB}) = 180° - 2 \cdot m(\widehat{OAB})$. Cum $\widehat{DOC} \equiv \widehat{AOB} \Rightarrow$ $\Rightarrow \widehat{DCO} \equiv \widehat{CAB} \Rightarrow DC \parallel AB$.

**VI.G.46.** $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ (caz L.U.L.) deoarece : $AB \equiv AC$ (ipoteză), $AD \equiv AE$ (ipoteză), $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}$ (ipoteză) $\Rightarrow BD = CE$ şi $BC = DE \Rightarrow$ $\Rightarrow DECB$ — paralelogram.

Din faptul că $\triangle ABD \equiv \triangle ACE \Rightarrow \widehat{ABD} \equiv \widehat{ACF}$ dar $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$ (ipoteză) $\Rightarrow \widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB} \Rightarrow \widehat{DECB}$ — dreptunghi, ceea ce justifică construcţia propusă. $\triangle ADE$ isoscel (ipoteză) $\Rightarrow m(\widehat{AED}) = (180° - 20°) : 2 = 80°$.

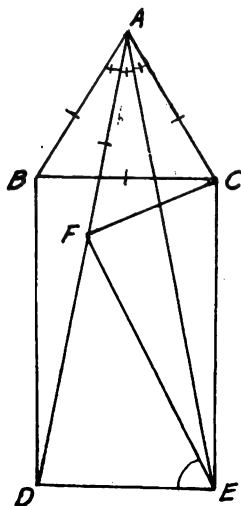



*Fig. VI.G.46.*

Apoi :

$\triangle ABD \equiv AFE$, deoarece : (caz L.U.L.)
$\begin{cases} AB = AF \text{ (ipoteză)} \\ AD = AE \text{ (ipoteză)} \\ m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{FAE}) = 20° \text{ (ipoteză)} \end{cases}$

Rezultă : $m(\widehat{AEF}) = m(\widehat{ADB}) = 10°$ rezultă $m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{AED}) - m(\widehat{AEF}) = 80° - 10° = 70°$.

**VI.G.47.** a) $AM = 2MC$ şi $PC = 2AP \Rightarrow$ segmentul $AC$ — împărţit în trei părţi egale de punctele $P$ şi $M$, astfel încît : $AP \equiv PM \equiv MC$.

Considerăm :

$\triangle BMC \equiv \triangle PMN$, deoarece : (caz L.U.L.)
$\begin{cases} BM \equiv MN \text{ (ipoteză)} \\ MC \equiv MP \text{ (demonstrat)} \\ \widehat{BMC} \equiv \widehat{NMP} \text{ (opuse la vîrf)} \end{cases}$

Rezultă : $PN \equiv BC$ şi $\widehat{MPN} = \widehat{MCB}$ (alterne interne) $\Rightarrow PN \parallel BC$, sau : considerăm patrulaterul $BCNP$ cu diagonalele $BN$ şi $PC$. Dar $BM \equiv MN$ şi $PM \equiv MC \Rightarrow BCNP$ este paralelogram $\Rightarrow PN \parallel BC$ şi $PN = BC$.

b) Notăm $AB = x$, $AC = y$. Din ipoteză :

$$\frac{2x+3y}{4x-y} = \frac{5}{3} \Rightarrow 6x + 9y = 20x - 5y \Leftrightarrow 9y + 5y = 20x - 6x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 14y = 14x \Leftrightarrow y = x \Leftrightarrow AB \equiv AC.$$

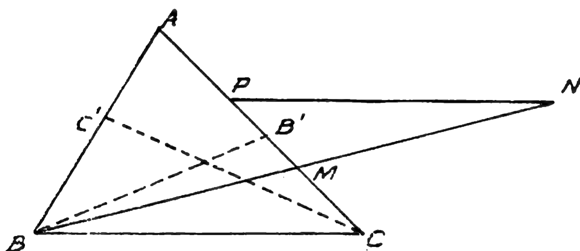



*Fig. VI.G.47.*

Deci în ipotezele punctului (b) $\triangle ABC$ este isoscel, şi într-un triunghi isoscel se poate demonstra că înălţimile corespunzătoare laturilor congruente sînt congruente, deci $BB' \equiv CC'$, unde $BB'$ şi $CC'$ sînt înălţimile $\triangle ABC$, $B' \in AC$ şi $C' \in AB$.

Observaţie : Dacă în teorema „într-un triunghi isoscel înălţimile corespunzătoare laturilor congruente, sînt congruente“, înlocuim cuvîntul „înălţimile“ cu cuvintele „medianele“ sau „bisectoarele“, obţinem propoziţii (proprietăţi) adevărate, adică noi teoreme relative triunghiurilor isoscele. Se demonstrează că şi propoziţiile „reciproce“ ale acestora sînt tot „proprietăţi“ ale triunghiurilor isoscele — deci proprietăţi „caracteristice“ ale triunghiurilor isoscele.

**VI.G.48.** Fie patrulaterul $BCPM$ : $BM \parallel PC$ (ipoteză) şi $MP \parallel BC$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $BCPM$ paralelogram ; $R$ intersecţia diagonalelor $\Rightarrow$ $MR \equiv RC$ şi $BR \equiv RP$ (proprietate în paralelogram). De asemenea $PC \equiv BM$ (proprietate în paralelogram) $\equiv MA$ (ipoteză). Considerăm patrulaterul $AMCP$ cu $AM \parallel PC$ şi $AM = PC$ (demonstrat) $\Rightarrow$ $AMCP$ este paralelogram. $N$ — intersecţia diagonalelor $\Rightarrow$ $MN = NP$ (proprietate în paralelogram).

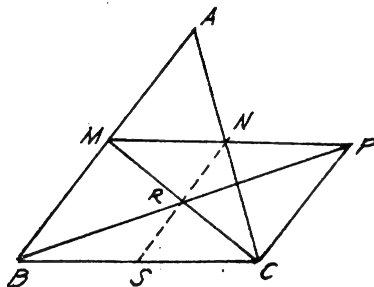



*Fig. VI.G.48.*

Fie $\triangle MPC$ : $MN = NP$ şi $MR \equiv RC$ (demonstrat) $\Rightarrow$ $NR$ — linie mijlocie $\Rightarrow$ $NR \parallel PC$ $\Rightarrow$ $\widehat{MRN} = \widehat{MCP}$ (corespondente). (1)

Fie $\triangle MCB$ : $MR \equiv RC$ şi $BS \equiv SC$ (demonstrat) $\Rightarrow$ $RS$ — linie mijlocie $\Rightarrow$ $RS = BM$ $\Rightarrow$ $\widehat{SRC} \equiv \widehat{BMC}$ (corespondente). (2)

Dar $BMCP$ — paralelogram (demonstrat) ($BM \parallel CP$) $\Rightarrow$ $\widehat{BMC} \equiv \widehat{MCP}$ (alterne interne). (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ $\widehat{SRC} \equiv \widehat{MRN}$.

Deci : $\widehat{SRC}$ şi $\widehat{MRN}$ sînt congruente şi au latura $MR$ şi $RC$ în prelungire $\Rightarrow$ $NR$ şi $RS$ sînt în prelungire $\Rightarrow$ $N, R, S$ — coliniare.

Observaţie : După ce am stabilit că patrulaterele $BCPM$ şi $MCPA$ sînt paralelograme, şi că punctele $R$ şi $N$ sînt intersecţiile diagonalelor acestor paralelograme, rezolvarea problemei putea să continue astfel :

În $\triangle MCP$, $NR$ linie mijlocie, deci $NR \parallel PC$.

În $\triangle CMB$, $RS$ linie mijlocie, deci $SR \parallel MB$.

Cum $PC \parallel MB$, $BCPM$ fiind paralelogram $\Rightarrow$ $NR \parallel RS$, aşadar punctele $N, R, S$ — coliniare.

**VI.G.49.** a)

$\triangle AME \equiv \triangle BMC$, deoarece : (caz L.U.L.) $\left\{\begin{array}{l} AM \equiv MB \text{ (ipoteză)} \\ ME \equiv MC \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{EMA} \equiv \widehat{BMC} \text{ (opuse la vîrf)} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{EAM} \equiv \widehat{MBC}$

b)

$\triangle ANF \equiv \triangle BNC$, deoarece : (caz L.U.L.) $\left\{\begin{array}{l} BN \equiv NF \text{ (ipoteză)} \\ AN \equiv NC \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{ANF} \equiv \widehat{BNC} \text{ (opuse la vîrf)} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{FAN} \equiv \widehat{NCB}$

Cum $\widehat{EAF} = m(\widehat{EAM}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{NAF}) = m(\widehat{MBC}) + m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{NCB}) = 180 \Rightarrow E, A, F$ sînt coliniare.

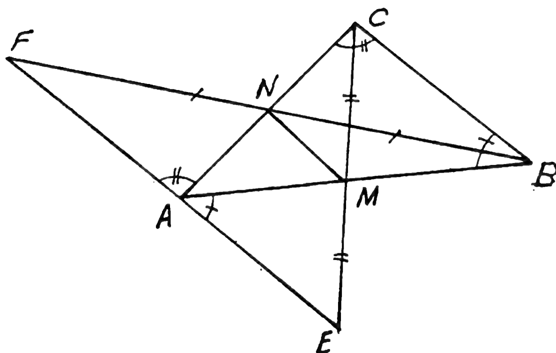



*Fig. VI.G.49.*

Altă rezolvare : b) Patrulaterul $AEBC$ este paralelogram, deoarece diagonalele $AB$ și $EC$ se îmjumătățesc $\Rightarrow AE \parallel BC$ **(1)**

Patrulaterul $FABC$ este paralelogram deoarece diagonalele $AC$ și $FB$ se înjumătățesc $\Rightarrow AF \parallel BC$ (2). Rezultat care împreună cu (1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow AE \parallel AF \Rightarrow A, E, F$ coliniare.

c) DIRECTĂ : Din $m(\widehat{ABC}) = 90°$ și $CN \equiv NA$ ($BN$ mediană) $\Rightarrow$ $\Rightarrow BN = CN$ conform teoremei : „Într-un triunghi dreptunghic mediana relativă ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei."

RECIPROCĂ : Din $BN$ mediană în $\triangle BAC$, și $BN \equiv CN \Rightarrow BN \equiv$ $\equiv AN$. $\triangle BNC$ isoscel : $m(\widehat{CBN}) = m(\widehat{BCN}) = x°$. $\triangle BNA$ isoscel : $m(\widehat{ABN}) = m(BAN) = y°$. Calculăm : $m(\widehat{BNC}) + m(\widehat{BNA}) = 180° - 2x° +$ $+ 180° - 2y° \Rightarrow 180° = 360 - 2(x° + y°) \Rightarrow x° + y° = 90°$, deci $\triangle ABC$ dreptunghic în $B$.

**VI.G.50.** Fie $\triangle ABC : AM \equiv MB$ (ipoteză) și $BN \equiv NC$ (ipoteză) $\Rightarrow MN$ — linie mijlocie $\Rightarrow MN \parallel AC, MN = \frac{AC}{2}$. **(1)**

Fie $\triangle ADC : AQ = QD$ (ipoteză) și $CP = PD$ (ipoteză) $\Rightarrow QP$ — linie mijlocie $\Rightarrow QP \parallel AC, QP = \frac{AC}{2}$. **(2)**

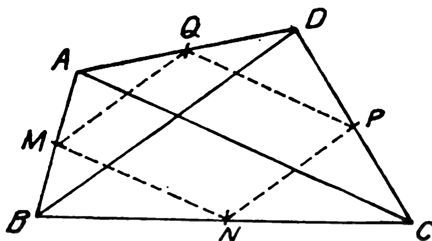



*Fig. VI.G.50.*

Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \parallel QP$ și $MN = QP \Rightarrow MNPQ$ — paralelogram.

Pentru ca $MNPQ$ să fie dreptunghi trebuie ca să aibă în plus un unghi de 90° de exemplu ($MN \perp QM$). Dar $MN \parallel AC$ și $QM \parallel DB$ deci trebuie ca $AC \perp DB$. Deci diagonalele patrulaterului să fie perpendiculare, deci patrulaterul să fie ortodiagonal.

Pentru ca $MNPQ$ să fie pătrat trebuie ca în plus de cazul precedent, de exemplu $MN \equiv QM$. Dar $MN = \frac{AC}{2}$, $QM = \frac{DB}{2}$ (ca linie mijlocie în $ADB$) $\Rightarrow = \frac{AC}{2} \Rightarrow \frac{DB}{2} \Rightarrow AC = DB$ deci patrulaterul $ABCD$ trebuie să aibă diagonalele perpendiculare și congruente.

**VI.G.51.** DIRECTĂ : Dacă $AD \| BC$ şi $AB \| DC$ şi $AM = MB$ şi $DM \equiv MC$ atunci :

$\triangle ADM \equiv \triangle BCM$, deoarece : (caz L.L.L.)
$$\left.\begin{array}{l} AM \equiv BM \text{ (ipoteză)} \\ AD \equiv BC \text{ (laturi opuse în paralelogram)} \\ DM \equiv MC \text{ (ipoteză)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m(\widehat{ADM}) \equiv m(\widehat{BCM}), \\ \text{cum } m(\widehat{ADM}) + m(\widehat{BCM}) = \\ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{ADM}) = 90^\circ \end{array}\right.$$

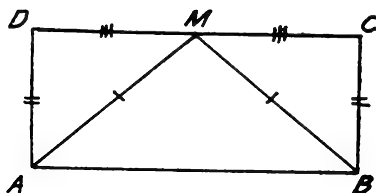



*Fig. VI.G.51.*

RECIPROCĂ : În figura VI.G.51., presupunem $ABCD$ dreptunghi. Dacă $AD \| BC$ şi $AB \| DC$ şi $m(\widehat{ADC}) = 90^\circ$ şi $DM \equiv MC$, atunci :

$\triangle ADM \equiv \triangle BCM$, deoarece : (caz L.U.L.)
$$\left.\begin{array}{l} AD \equiv BC \text{ (laturi opuse în dreptunghi} \\ m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{BCM}) = 90^\circ \\ DM \equiv MC \text{ (ipoteză)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow AM \equiv MB$

**VI.G.52.** Ducem : $PT \| AC$, $(T \in BR) \Rightarrow PQRT$ este dreptunghi deoarece are laturile paralele două cîte două : $PQ \| RT$ şi $TP \| RQ$ şi $m(\widehat{PQR}) = 90^\circ$ (ipoteză) $\Rightarrow RQ \equiv TP$ şi $TP \perp BR$.

Apoi : $\triangle BTP \equiv \triangle PSB$, deoarece : (caz I.U.)
$$\left\{\begin{array}{l} BP \text{ (latură comună)} \\ m(\widehat{BTP}) = m(\widehat{BSP}) = 90^\circ \\ m(\widehat{BPT}) = m(\widehat{PBS}), \text{ (deoarece :} \\ \quad \widehat{BPT} \equiv \widehat{BCR} \text{ (alterne interne, paralele } PT \text{ şi } CR) \\ \quad \text{şi } \widehat{BCR} \equiv \widehat{PBS} \text{ ca unghiuri ale } \triangle ABC \text{ isoscel)} \end{array}\right.$$

Rezultă că : $TP \equiv BS$, dar $TP = RQ$ (demonstrat), deci $BS = RQ$.

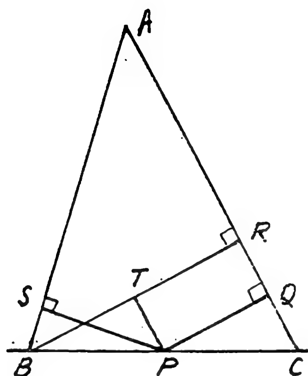


*Fig. VI.G.52.*

**VI.G.53.**

1\.

$\triangle EAC \equiv \triangle BAG$, deoarece : (caz L.U.L.)
$\begin{cases} EA \equiv AB \text{ (ipoteză)} \\ AC \equiv GA \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{EAC} \equiv \widehat{BAG} \text{ (deoarece : } \\ \quad m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{EAB}) + \\ \quad + m(\widehat{BAC}) = 90° + m(\widehat{BAC}) \text{ şi} \\ \quad m(\widehat{BAG}) = m(\widehat{CAG}) = 90° + \\ \quad + m(\widehat{BAC})) \end{cases}$

Rezultă că $EC = BG$.

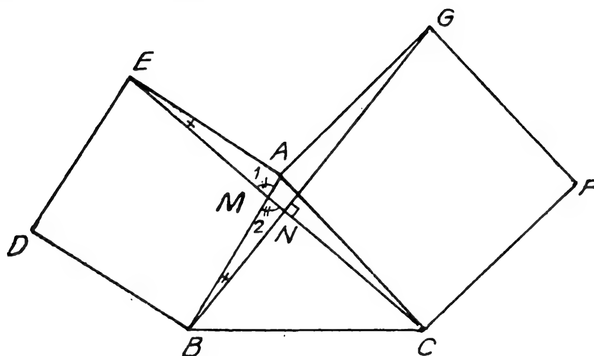


*Fig. VI.G.53.*

2. În triunghiurile $AEM$ și $NBM$ avem : $\widehat{AEC} \equiv \widehat{ABN}$ (demonstrat) $\widehat{M_1} \equiv \widehat{M_2}$ (ca opuse la vîrf). Cum în $\triangle AEM$ $m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{M_1}) = 90° \Rightarrow$ în $\triangle NBM$, $m(\widehat{ABN}) + m(\widehat{M_2}) = 90°$ și deci $m(\widehat{MNB}) = 90° \Rightarrow EC \perp BG$.

**VI.G.54.** În $\triangle ABC$ :

a) $A'C'$ — linie mijlocie $\Rightarrow A'C' \parallel AC$, $A'C' = \frac{AC}{2}$.

$A'B'$ — linie mijlocie $\Rightarrow A'B' \parallel AB$, $A'B' = \frac{AB}{2}$.

Dar $AC \equiv AB$ (ipoteză) $\Rightarrow A'C' \equiv B'C' \Rightarrow \triangle A'B'C'$ — isoscel.

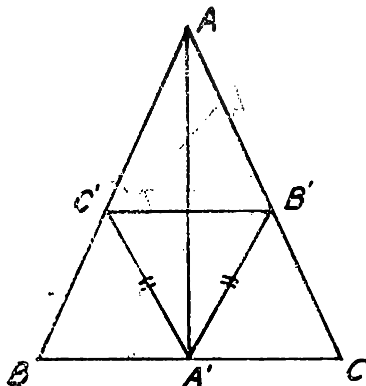



*Fig. VI.G.54.*

b)

$\triangle AC'A' \equiv \triangle AB'A'$, deoarece : (caz L.L.L.)
- $AC' \equiv AB'$ (jumătăți de laturi congruente)
- $A'C' \equiv A'B'$ (punctul a)
- $AA' = AA'$ (latură comună)

Rezultă $\widehat{C'A'A} = \widehat{B'A'A} \Rightarrow AA'$ — bisectoare $\widehat{C'A'B'}$.

Observație : Alt enunț relativ la problema propusă : Fie $ABC$ un triunghi și $A'$, $B'$, $C'$ respectiv mijloacele laturilor $BC$, $AC$ și $AB$. Triunghiul $ABC$ este isoscel dacă și numai dacă $\triangle A'B'C'$ este isoscel. Sau : Triunghiul $A'B'C'$ este isoscel dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este isoscel.

Rezolvați aceste probleme.

**VI.G.55.**

a) :

$\triangle AMP \equiv \triangle MBN$, deoarece : (caz U.L.U.)

- $AM \equiv MB$ (ipoteză)
- $\widehat{BAP} \equiv \widehat{BMN}$ (corespondente, ipoteză)
- $\widehat{AMP} \equiv \widehat{MBN}$ (corespondente, ipoteză)

Rezultă câ : $AP \equiv MN$.

b) :

$\triangle AMP \equiv \triangle NPM$, deoarece : (caz L.U.L.)

- $AP \equiv MN$ (punctul a)
- $MP$ — latură comună
- $\widehat{APM} = \widehat{PMN}$ (alterne interne, ipoteză)

Rezultă $AM \equiv NP$.

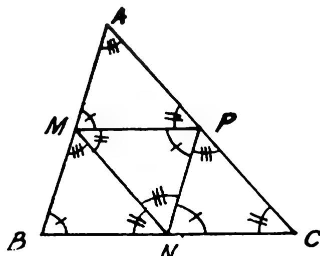



*Fig. VI.G.55.*

c) :

$\triangle MNP \equiv \triangle CNP$, deoarece : (caz U.L.U.)

- $NP$ — latură comună
- $\widehat{MNP} \equiv \widehat{CPN}$ ($\widehat{MNP} \equiv \widehat{MAP}$ (punctul b) şi $\widehat{CPN} \equiv \widehat{MAP}$, deoarece : în $\triangle AMP$ şi $\triangle PNC$ $\widehat{APM} \equiv \widehat{PCN}$ — corespondente şi $\widehat{AMP} \equiv \widehat{MPN} \equiv \widehat{PNC}$)
- $\widehat{MPN} \equiv \widehat{PNC}$ (alterne interne, ipoteză)

Rezultă : $MP \equiv NC$.

d)

$\triangle AMP \equiv \triangle NPC$, deoarece : (Caz L.U.L.)

- $AM \equiv NP$ (punct b)
- $\widehat{AMP} \equiv \widehat{PNC}$ (punct c)
- $MP \equiv NC$ (punct c)

Rezultă $AP \equiv PC$.

e) Din a) şi b) (tranzitivitatea congruentei triunghiurilor) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle MPN \equiv \triangle NBM \Rightarrow MBNP$ paralelogram (definiţie) $\Rightarrow MP \equiv BN$.

Din c) $\Rightarrow MNCP$ paralelogram (definiţie) $\Rightarrow MP \equiv NC \Rightarrow MP = \frac{BC}{2}$.

Observaţie : Triunghiul $MNP$ ($M$, $N$, $P$ fiind mijloacele laturilor triunghiului $ABC$) se numeşte triunghi medial sau complementar faţă de triunghiul $ABC$.

**VI.G.56.**

a)

$BCF = DAC$, deoarece : (Caz L.U.L.)
$$\left\{\begin{array}{l} BC \equiv CF \equiv CA \equiv AD \text{ (ipoteză)} \\ \widehat{BCF} \equiv \widehat{CAD} \text{ pentru că} \\ \quad m(\widehat{BCF}) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \text{ şi} \\ \quad m(\widehat{CAD}) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \end{array}\right.$$

Rezultă $BF \equiv CD$.

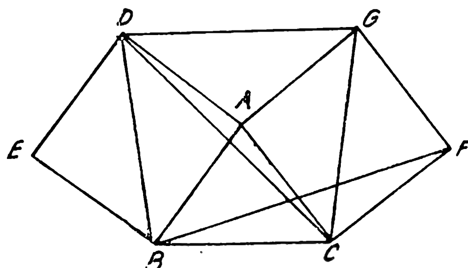



*Fig. VI.G.56.*

b) $DB = GC$ (diagonale în pătrate congruente), sau $\triangle DAB \equiv \triangle GAC$ fiind $\triangle$ dreptunghice şi isoscele $AD \equiv AB \equiv AG \equiv AC$, de unde rezultă $DB \equiv GC$ (1).

În patrulaterul $DBCG$, evaluăm măsurile unghiurilor $DBC$ şi $GDB$, astfel :

$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ABC}) = 40^\circ + 60^\circ = 105^\circ$

$m(\widehat{GDB}) = m(\widehat{GDA}) + m(\widehat{ADB}) = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$ căci în $\triangle$ isoscel $GDA$ (ipoteză) $m(\widehat{GDA}) = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$.

Cum $m(\widehat{DBC}) + m(\widehat{GDB}) = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, rezultă că dreptele $DG$ şi $BC$ intersectate de secanta $DB$ sînt paralele (2). Aşadar din (1) şi (2) rezultă că patrulaterul $DBCG$ este trapez isoscel.

# CLASA A VII-A

## REZOLVĂRILE ŞI REZULTATELE PROBLEMELOR PENTRU CLASA A VII-A

**VII.A.1.** a) Obţinem succesiv : $27 \cdot 111^3 - 333^3 = 3^3 \cdot 111^3 - 333^3 = (3 \cdot 111)^3 - 333^3 = 0$.

b) Avem succesiv : $(-1)^n(-1)^1 + (-1)^n(-1)^2 + (-1)^n(-1)^3 = -(-1)^n + (-1)^n - (-1)^n = -(-1)^n$. Mai departe, dacă $n$ este număr natural par obţinem $-1$ iar dacă $n$ este număr natural impar obţinem 1.

c) Obţinem succesiv : $2^n + (-1)^n \cdot 2^n : 2^n = 2^n + (-1)^n$. Pentru $n$ număr natural par obţinem $2^n + 1$, iar pentru $n$ număr natural impar obţinem $2^n - 1$.

**VII.A.2.** Obţinem: $72^n + 9^n \cdot 3 \cdot 8^n \cdot 2 + 8^n \cdot 8 \cdot 9^n = 72^n \cdot (1 + 6 + 8) = 15k$, unde $k = 72^n$.

**VII.A.3.** Imediat : $N = 6^n + 2^n \cdot 3^n \cdot 3 + 2^n \cdot 3^n \cdot 3^2 = 6^n(1 + 3 + 9) = 13 \cdot 6^n$.

**VII.A.4.** Fie $p$ un număr prim. Presupunem că : $n^2 + n + p = 1984$, adică $n(n + 1) + p = 1984$. Cum $n(n + 1)$ este par, rezultă că $p$ trebuie să fie par, deci $p = 2$. Rămîne că $n(n + 1) = 1982$ ceea ce nu are loc pentru nici un număr natural $n$.

**VII.A.5.** a) Produsul este zero întrucît pentru $x = 37$, apare factorul $37 - 37 = 0$.

b) Ecuaţia $(x - 1) + (x - 2) + \ldots + (x - 50) = 25$ este echivalentă cu ecuaţia $50x - (1 + 2 + 3 + \ldots + 50) = 25$ cu soluţia $x = 26$.

Am obţinut $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = (1 + 50) + (2 + 49) + \ldots + (25 + 26) = 50 \cdot \left(\frac{51}{2}\right) = 1275$.

c) Pentru $x = 0$, avem $(-1)(-2) \ldots (-50) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 50$ deoarece sînt un număr par de factori.

Pentru $x = 51$ produsul este : $50 \cdot 49 \ldots 2 \cdot 1$.

**VII.A.6.** Presupunem că numărul este impar. Atunci fiecare $a_i + b_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ este impar, deci $a_i$ şi $b_i$ au parităţi diferite. Rezultă că numărul numerelor pare este egal cu cel al numerelor impare ceea

ce contrazice faptul că numărul total al numerelor $a_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ este impar.

**VII.A.7.** Fie numărul $\overline{xy}$. Avem $\frac{x-y}{x+y}=\frac{2}{3}$ sau $x=5y$. $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ implică $y=1$ și, deci, $x=5$. Așadar, numărul este 51.

**VII.A.8.** Avem $10x+y=2xy$ sau $y=\frac{10x}{2x-1}=\frac{10x-5+5}{2x-1}=$ $=\frac{10x-5}{2x-1}+\frac{5}{2x-1}=5+\frac{5}{2x-1}$. $y \in \mathbf{N}$ implică $2x-1$ divizor al lui 5. Rezultă $x=3$ și $y=6$, adică numărul 36.

**VII.A.9.** Rezultă $b+c=6$ sau $b+c=16$.

1) $b+c=6$ ; $a+c=b$ și necesitatea ca $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, $b, c \in$ $\in \{1, 2, \ldots, 9\}$. Rezultă numărul 4511.

2) Dacă $b+c=16$ și celelalte condiții de la 1) rezultă numărul 1977.

**VII.A.10.** Avem: $y=\frac{33-4x}{2x-3}=-2+\frac{27}{2x-3}$ și ținem cont că $x, y \in \mathbf{N}$. Numerele sînt 37 și 61.

**VII.A.11.** *a)* Avem : $\overline{ab}=4(a+b)$ sau $10a+b=4(a+b)$ sau $2a-b=$ $=0$. Se obțin numerele 12, 24, 36, 48.

**VII.A.12.**

$$S=(\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab})+(\overline{acb}+\overline{cba}+\overline{bac})=111(a+b+c)+$$
$$+111(a+b+c)=222(a+b+c).$$

b) Să observăm că : $6 \leqslant a+b+c \leqslant 24$. Rezultă $1\,332 \leqslant S \leqslant 5\,328$.

**VII.A.13.** $\overline{abcd}=\overline{dcba}$ implică $a=d$.

$10^3a+10^2b+10c+a=10^3a+10^2c+10b+a$ implică $b=c$.

Deci $\overline{abba}=1001a+110b=11(91a+10b)$ ; $91a+10b \neq 11$ pentru orice cifră $a$ și $b$ și $91a+10b=121$ pentru $a=1$ și $b=3$. Rezultă deci că numărul nu poate fi pătrat perfect, dar poate fi cub perfect (în cazul numărului 1 331).

Observație : Se poate arăta că nu există valori pentru $a$ și $b$ astfel încît $91a+10b=11x^2$ oricare ar fi $x$.

**VII.A.14.** Fracția se scrie succesiv :

$$\frac{15^n\cdot 3+15^n\cdot 25+15^n\cdot 6}{12^n\cdot 2+12^n\cdot 3+12^n\cdot 12}=\frac{15^n(3+25+6)}{12^n(2+3+12)}=\left(\frac{5}{4}\right)^n\cdot\frac{34}{17}.$$

**VII.A.15.** Aplicăm proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale. Obținem, ținînd cont de ipoteză :

$$x-y=\frac{y+z}{4}=\frac{z}{3}=\frac{(x-y)+(y+z)+z}{1+4+3}=\frac{x+2z}{8}=2.$$

În continuare, din $\frac{z}{3}=2$ rezultă $z=6$, ș.a.m.d., $y=2$ și $x=4$.

**VII.A.16.** Amplificăm raportul $\frac{x_1}{a_1}$ cu $x_1^m$, $\frac{x_2}{a_2}$ cu $x_2^m$, ş.a.m.d. $\frac{x_n}{a_n}$ cu $x_n^m$ şi aplicăm proprietatea fundamentală a şirului de rapoarte egale.

**VII.A.17.** Fie $x, y \in \mathbf{N}$ numitorii celor două fracţii. Avem $\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=$ $=\frac{3(x+y)}{xy}=-\frac{39}{40}$ şi, ţinînd cont de ipoteza $\frac{1}{xy}=\frac{1}{40}$, numèrele verifică relaţiile : $x+y=13$ şi $xy=40$. $40=2^3\cdot 5$ implică faptul că numerele pot fi 5 şi 8 ; 4 şi 10 sau 2 şi 20. Observăm că 5 şi 8 sînt numerele care satisfac simultan cele două condiţii.

**VII.A.18.** a) Pentru $n$ număr natural par se obţine $\frac{2}{9}+\frac{7}{9}+1=2$ iar pentru $n$ impar $\frac{-2}{9}-\frac{7}{9}+1=0$.

b) Observăm că oricare ar fi $k$ natural (par sau impar), $\frac{7}{2}(-1)^{k+1}+\frac{2}{7}(-1)^{k+2}=0$. În continuare, pentru $p+3$ par adică $p=2q-3$ obţinem 1, pentru $p+3$ impar, adică $p=2s$, obţinem valoarea $-1$.

**VII.A.19.**

a) $k=$ par avem $E(x)=x^2-3x+2-x^2-6x+4=-9x+6$.

$k=$ impar : $E(x)=-x^2+3x-2+x^2+6x-4=9x-6$.

Deci : pentru $k=$ par $E(\sqrt{2})=-9\sqrt{2}+6$ ; $E(-\sqrt{2})=9\sqrt{2}+6$

pentru $k=$ impar $E(\sqrt{2})=9\sqrt{2}-6$ ; $E(-\sqrt{2})=-9\sqrt{2}-6$.

b) $ma=9\sqrt{2}$, iar $mg=\sqrt{(9\sqrt{2}-6)(9\sqrt{2}+6)}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}$.

Deci :

$$A=\frac{9}{ma}+\frac{7}{mg}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{7}{3\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{14}}{6}=\frac{\sqrt{2}(3+\sqrt{7})}{6}$$

**VII.A.20.** Pentru $n$ şi $m$ de aceeaşi paritate obţinem :

$$a\cdot b=-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2,$$

iar pentru $n$ şi $m$ de parităţi diferite obţinem :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$$

**VII.A.21.** a) Aplicăm definiţia modulului unui număr real : $|x|=x$ dacă $x \geqslant 0$ şi $|x|=-x$ dacă $x<0$ şi faptul că : $\sqrt{x^2}=|x|$.

Rezultă :

$$\sqrt{2}-|-2|+\sqrt{2}-1+3-\sqrt{8}=0.$$

b) Avem: $-x+\sqrt{(x-1)^2}-|4|\cdot|x|+|-2|\cdot|x|=|-x|+|x-1|+2|x|$. Pentru $x=-2$, avem : $2+|-3|+2|-2|=9$.

**VII.A.22.** Avem succesiv :

$$x=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}+\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{2}+\sqrt{3}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}+$$

$$+\sqrt{2}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}.$$

În continuare $x^6=(2\sqrt{3})^6=2^6\cdot\sqrt{3^6}=2^6\cdot 3^3=1\ 728.$

**VII.A.23.**

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})=1\in \mathbf{N},$$

deci $p_1$ este falsă.

$$\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=$$

$$=|\sqrt{5}-2|+|3-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1\in \mathbf{N},$$

deci $p_2$ este adevărată.

Ultima cifră a numărului $5n+7$ este 2 sau 7 oricare ar fi $n\in \mathbf{N}$, deci nu poate fi pătratul unui număr (a cărui ultimă cifră poate să fie 0, 1, 4, 5, 6 sau 9). Deci $p_3$ este adevărată.

**VII.A.24.** Obținem succesiv :

$$[(7+4\sqrt{3})^{1986}+(7+4\sqrt{3})^{1986}]\cdot\frac{2^{1986}(7-4\sqrt{3})^{1986}}{2^{1987}}=$$

$$=[(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})]^{1986}=1.$$

**VII.A.25.** Avem $x^2=34+2\sqrt{145}$ și $y^2=58$. $x^2>y^2$ deoarece : $34+$ $+2\sqrt{145}>58$ este echivalent cu $\sqrt{145}>12$ sau $145>144$. Deci $x>y$.

**VII.A.26.** $A=0$ deoarece $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}-\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^2=(\sqrt{6})^2$ ;

$$4+4-2\sqrt{16-15}=6\ ;\ 8-2=6.$$

**VII.A.27.** a) Deoarece $10-\sqrt{19}<10+\sqrt{19}$ și sînt numere pozitive avem $\sqrt{10-\sqrt{19}}<\sqrt{10+\sqrt{19}}$ adică $\sqrt{10-\sqrt{19}}-\sqrt{10+\sqrt{19}}<0$ deci $a<0$.

b) $a^2=10-\sqrt{19}-2\sqrt{81}+10+\sqrt{19}=20-18=2.$

c) Deoarece $a<0$ și $a^2=2$ avem $a=-\sqrt{2}$ și deci $(a+\sqrt{2})^{100}=0$.

**VII.A.28.** Avem

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}\ \text{și}\ \sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}.$$

Fracțiile au același numărător și ordinea este dată de valoarea numitorilor. Cum evident $\sqrt{k}+\sqrt{k+1}<2\sqrt{k}<\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$ ; rezultă următoarea ordine crescătoare a numerelor date :

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\ ;\ \frac{1}{2}\sqrt{k}\ ;\ \sqrt{k}-\sqrt{k-1}.$$

**VII.A.29.** Utilizăm formula :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}} \quad \text{unde } C^2 = A^2 - B. \text{ Obținem :}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{6} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} +$$

$+ \frac{\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6} = 0 \in Q$ sau observăm că $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 6^2 =$
$= (\sqrt{6})^2$ .

**VII.A.30.** De exemplu, $f : \{-2, 0, 2\} \to \{0, 2, 4\}$, $f(x) = -x + 2$ cu graficul :

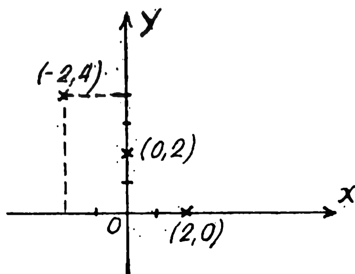



*Fig. VII.A.30.*

**VII.A.31.** Obținem următorul grafic :

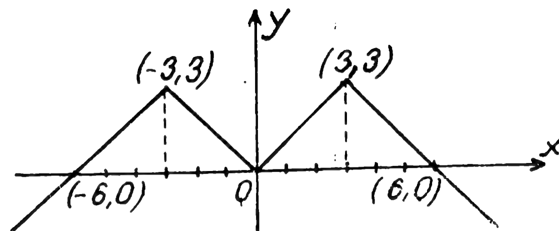



*Fig. VII.A.31.*

**VII.A.32.** $f(1) = 11$, $f(2) = 13$, $f(3) = 17$, $f(4) = 23$, $f(5) = 31$, deci numere prime.

Avem $f(n) = n(n-1) + 11$ care se poate scrie ca un produs de factori diferiți de 1 dacă $n = 11$ sau dacă $n - 1 = 10$. Obținem, respectiv numerele $f(11) = 11 \cdot 11 = 121$ și $f(12) = 11 \cdot 13 = 143$.

**VII.A.33.** b) Există $n = 2$ pentru care $f(2) = 8$ şi nu este prim.

c) $f(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 7 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ ca o sumă de numere pozitive.

**VII.A.34.** b) $x = y$ implică $x = 2x + 3$, deci $x = -3$, deci punctul de coordonate $(-3, -3)$.

Observaţie : În general avem $ax + b = x$ sau $(1 - a)x = b$ ecuaţie care are soluţie unică pentru $a \neq 1$, nu are soluţie pentru $a = 1$ şi $b \neq 0$ sau o infinitate de soluţii pentru $a = 1$ şi $b = 0$.

În consecinţă : se deduc funcţiile cu un singur punct cu coordonatele egale (numit şi „fix"), cu o infinitate de puncte fixe sau cu nici un punct fix.

**VII.A.35.** Graficul lui $f$ este următorul :

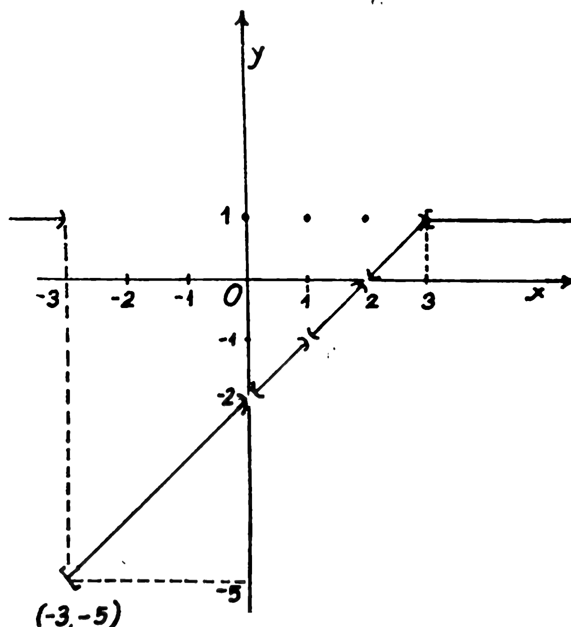



*Fig. VII.A.35.*

**VII.A.36.** a) Punctul (1, 7) aparţinînd graficului implică $f(1) = 7$. Cum $1 \in (-1, +\infty)$, rezultă $m + 2 = 7$, adică $m = 5$.

**VII.A.37.** a) $-2 \in (-\infty, 2]$ deci $a(-2)+5=4$, de unde rezultă $a = \frac{1}{2}$; $3 \in (2, +\infty)$ deci $-2\cdot 3 + b = 4$, de unde rezultă $b = 10$.

b) Graficul funcției este următorul :

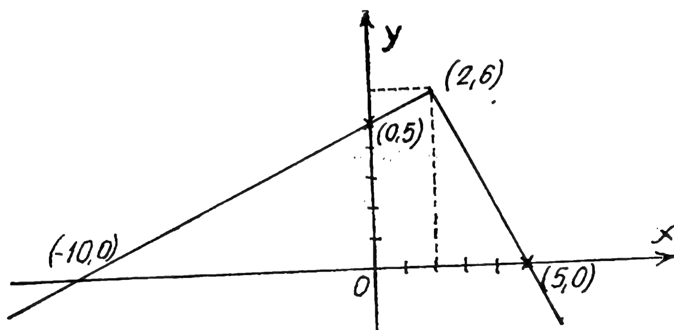



*Fig. VII.A.37.*

c) Punctele de pe axa $0x$ au ordonata nulă. Pentru $x \leqslant 2$ obținem $\left(\frac{1}{2}\right)x + 5 = 0$, $x = -10$ deci punctul $(-10, 0)$. Pentru $x > 2$ obținem $-2x + 10 = 0$, $x = 5$ deci punctul $(5, 0)$.

**VII.A.38.** a) $4 \in (1, +\infty)$, deci $-2(4) + m = -5$, $m = 3$.

b) Pentru $x \in (-\infty, 1]$ inecuația este $x \leqslant 0$ cu soluția $x \in (-\infty, 0] \cap (-\infty, 1] = (-\infty, 0]$.

Pentru $x \in (1, +\infty)$ inecuația este $-2x + 3 \leqslant 0$ cu soluția $x \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \cap (1, +\infty) = \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$. Așadar inecuația $f(x) \leqslant 0$ este satisfăcută pentru $x \in (-\infty, 0] \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

**VII.A.39.** Deducem că intersecția graficului lui $f$ cu axa $0x$ este punctul $A(-6, 0)$, intersecția graficului lui $g$ cu axa $0x$ este punctul $B(2, 0)$, iar intersecția dintre graficele lui $f$ și $g$ este punctul $C(-2, 4)$. Triunghiul $ABC$ este dreptunghic și isoscel.

Într-adevăr, dacă $C'$ este proiecția pe $Ox$ a lui $C$, atunci $C'(-2,0)$ este la mijlocul segmentului $AB$, deci triunghiul este isoscel, $CA = CB$; triunghiul $AOD$, unde $D$ este intersecția graficului lui $f$ cu axa $Oy$ este, evident, isoscel și dreptunghic. Deci unghiul $CAO$ are $45°$. Așadar, unghiul „de la vîrful" triunghiului isoscel $ACB$ este de $90°$, deci graficele lui $f$ și $g$ sînt perpendiculare în $C$.

**VII.A.40.** Abscisele punctelor $A$ și $C$ indică domeniul de definiție : intervalul $[-3, 3]$. Fie $G$ graficul lui $f: [-3, 3] \Rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$. $a, b \in \mathbf{R}$. $A, B, C \in G$ implică $f(-3) = 0$, $f(0) = 3$, $f(3) = 0$.

Pe $[-3, 0]$ avem : $\begin{cases} f(-3) = 0 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + b = 0 \\ b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases} f(x) = x + 3$

Pe $[0, 3]$ avem : $\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} f(x) = -x + 3$

Avem $f : [-3, 3] \to [0, 3]$, $f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \in [-3, 0] \\ -x + 3, & x \in [0, 3] \end{cases}$

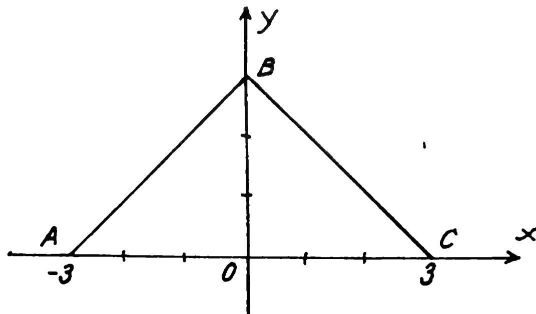



*Fig. VII.A.40.*

**VII.A.41.** a) $f(1) = 4$ implică $a = 2$.

b) Trebuie să existe implicația : „$x \geq 5$ implică $x \leq -\frac{a}{2}$", ceea ce are loc dacă și numai dacă $-\frac{a}{2} \leq 5$ de unde rezultă $a \geq -10$.

c) Nu, deoarece funcția este strict crescătoare (are coeficientul lui $x$ pozitiv) și, deci, oricare ar fi $a$ ia și valori pozitive.

**VII.A.42.** 1. Oricare ar fi $y = x - 1985$, $f(y) = 5$. Avem deci funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 5$, al cărui grafic este o paralelă la $Ox$ la distanța de 5 unități.

2. Oricare ar fi $y = x - 1985$, $g(y) = y$. Avem, deci funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$ al cărei grafic este o bisectoare a unghiului $xOy$.

**VII.A.43.**

$$f(1) + f(\sqrt{2}) = a + b + a\sqrt{2} + b = a(1 + \sqrt{2}) + 2b \quad (1)$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = a(1 + \sqrt{2}) + b \quad (2)$$

Din (1) și (2) și din ipoteză rezultă $b = 0$. Deci funcțiile sînt de forma $f(x) = ax$, funcții al căror grafic trece printr-un același punct : $(0, 0)$.

**VII.A.44.** Funcţia este, dealtfel, determinată ; pentru orice număr real $1-x=y$, se obţine unicul număr real $4-x$. Notînd $1-x=y$ obţinem formula $f(y)=y+3$. Funcţia este deci $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x+3$.

Coordonatele punctelor $(x, x)$ sînt soluţiile ecuaţiei $f(x)=x$. În cazul de faţă $x+3=x$ nu are soluţii, deci nu există asemenea puncte.

**VII.A.45.** Să observăm că $f$ este o funcţie „de gradul I".

Într-adevăr dacă $y=-2x+\frac{1}{3}$, atunci $f(y)=3y+1$ deci funcţia este $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=3x+1$.

Lăsăm pe seama cititorului reprezentarea ei grafică.

**VII.A.46.** Determinăm mai întîi $f(1)$ dînd lui $x$ valoarea 2 în relaţia din ipoteză. Avem $f(1)=6-8-f(1)$ de unde $2f(1)=-2$, $f(1)=-1$. Deci $f(x-1)=3x-7$ sau $f(x-1)=3(x-1)-4$, deci $f(x)=3x-4$.

$f(0)=-4$ deci $A(0, 4)$ nu aparţine graficului lui $f$ ; ş.a.m.d.

**VII.A.47.** a) Pornind din membrul stîng obţinem :

$$x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=[(x-y)^2-2xy]^2-2x^2y^2.$$

b) Punînd $a=x+y$ şi $b=x-y$ observăm că avem :

$$4a^2-4ab+b^2-z^2=(2a-b)^2-z^2=(2a-b-z)(2a-b+z).$$

**VII.A.48.** $x^2+y^2=290$ este echivalentă cu $(x+y)^2-2xy=290$ sau, ţinînd cont de ipoteză, $xy=143=11\cdot 13$. Aşadar, numerele căutate sînt 11 şi 13.

**VII.A.49.**

$$P(X)=(X^4-X^2)+(7X^2-7)=(X^2-1)(X^2+7).$$

Factorul $X^2+7$ este pozitiv oricare ar fi valoarea reală $x$ a lui $X$ ; $xP(x)=0$ este echivalentă cu $x(x^2-1)(x^2+7)=0$ de unde rezultă $x=0$ sau $x^2-1=0$ cu soluţiile $x\in\{-1, 0, 1\}$.

**VII.A.50.** a) Pentru orice $x\in\mathbf{R}$, notăm $x-2=y$ şi obţinem $P(y)=y^2+3y$ care reprezintă valoarea polinomului $P(X)=X^2+3X$ în punctul $y$.

b) $Q(X)=X^2-2X$.

c) $S(X)=X^2-3X+2$.

**VII.A.51.** 2) $y=[(x+3)+(x-3)]^2=4x^2\geqslant 0$, oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$.

**VII.A.52.** a) Fie, de exemplu, numerele naturale consecutive $5k-2$; $5k-1$, $5k$, $5k+1$, $5k+2$, $k\in\mathbf{Z}$. Obţinem : $(5k-2)^2+(5k-1)^2+(5k)^2+(5k+1)^2+(5k+2)^2=125k^2+10$.

b) $S=5(25k^2+2)$, deci pentru ca $S$ să fie pătrat perfect ar trebui ca $25k^2+2$ să fie multiplu impar de putere a lui 5. Dar $k^2$ are ca terminaţii numai pe 1 ; 4 ; 5 ; 6 sau 9. Deci $25k^2+2$ se termină în 2 sau 7. În concluzie $5(25k^2+2)=S$ nu poate fi pătrat perfect.

Altfel, mai simplu, dacă $5(25k^2+2)$ ar fi pătrat perfect ar rezulta că 5 ar divide pe $25k^2+2$, adică 5 ar divide 2, imposibil.

**VII.A.53.** Fie $n$ număr natural, $n \geq 1$. Avem :

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=(n-1)^2(n-1)+n^3+(n+1)^2(n+1)=$$
$$=3n^3+6n=3n(n^2+2).$$

**VII.A.54.** Fie $x-1$, $x$, $x+1$, $x \in \mathbf{Z}$ numerele întregi consecutive. Trebuie ca : $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2=1\,877$ sau $x^2=625$, de unde rezultă numerele : 24, 25, 26 și $-24$, $-25$, $-26$.

**VII.A.55.** 1. Avem :

$$(3x+x\sqrt{x})+(2\sqrt{xy}+6\sqrt{y})=x(3+\sqrt{x})+2\sqrt{y}(\sqrt{x}+3)=$$
$$=(\sqrt{x}+3)(x+2\sqrt{y}).$$

2. $$(9x+4y+12\sqrt{xy})-1=(3\sqrt{x}+2\sqrt{y})^2-1=(3\sqrt{x}+$$
$$+2\sqrt{y}-1)(3\sqrt{x}+2\sqrt{y}+1).$$

3. $$x^2-(\sqrt{y}-1)^2=(x-\sqrt{y}+1)(x+\sqrt{y}-1).$$

**VII.A.56.** Relația din ipoteză se scrie echivalent : $(a^2-2a\sqrt{2}+2)+$ $+(b^2-2b\sqrt{3}+3)=0$ sau $(a-\sqrt{2})^2+(b-\sqrt{3})^2=0$, adică o sumă de pătrate nulă de unde rezultă că fiecare termen al sumei trebuie să fie nul. Așadar, $a-\sqrt{2}=0$ și $b-\sqrt{3}=0$ deci $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$ și în continuare, înlocuind valorile lui $a$ și $b$ se verifică imediat egalitatea de demonstrat.

**VII.A.57.** Avem: $E(x, y)=(25y^2-10xy+x)^2+(4x^2-4x+1)=(5y-$ $-x)^2+(2x-1)^2$ o sumă de pătrate care are valoarea minimă zero. atunci cînd fiecare termen este zero. Rezultă $x=\frac{1}{2}$ și $y=\frac{1}{10}$.

**VII.A.58.** Avem :

$$(x-2)[(x-2)^3+(x-2)^2+(x-2)+1]=$$
$$=(x-2)(x-1)(x^2-4x+5).$$

**VII.A.59.**

$$E=(a-b)^2(a-b-a-b)=-2b(a-b)^2>0\,;$$
$$F=(a+b)^2(a+b+a-b)=2a(a+b)^2<0.$$

Deci : $E>F$.

**VII.A.60.** Scriem, de exemplu : $c-a=(c-b)-(a-b)$ și obținem :

$$a^2(b-c)+b^2[(c-b)-(a-b)]+c^2(a-b)=$$
$$=[a^2(b-c)-b^2(b-c)]+[c^2(a-b)-b^2(a-b)]=$$
$$=(b-c)(a^2-b^2)+(a-b)(c^2-b^2)=(a-b)(b-c)(a+$$
$$+b-c-b)=(a-b)(b-c)(a-c).$$

**VII.A.61.** Arătăm că $\sqrt{17-\sqrt{145}}+\sqrt{17+\sqrt{145}}>\sqrt{10}$. Inegalitatea este echivalentă cu $\left(\sqrt{17-\sqrt{145}}+\sqrt{17+\sqrt{145}}\right)^2>(\sqrt{10})^2$ adică $34+$ $+2\cdot 12>10$, ceea ce este adevărat.

**VII.A.62.** Numerele întregi $x$ verifică, deci, relația $x^2<(3-\sqrt{2})^2$ adică $-3+\sqrt{2}<x<3-\sqrt{2}$. Rezultă pentru $x$ valorile : $-1$ ; $0$ ; $1$.

**VII.A.63.**

$$A=\frac{(0,01+0.99)+(0,02+0,98)+\ldots+(0,49+0,51)+0.50}{\sqrt{(5+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(5-\sqrt{2})^2}}=\ldots$$

$$=\frac{49,50}{10}=4,95.$$

**VII.A.64.** Avem :

$$A=|\sqrt{3}-2|+|\sqrt{2}-3|+|\sqrt{3}+\sqrt{2}|=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-$$
$$-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}=2+\sqrt{3}.$$

$$B=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=\sqrt{3}-1+1+$$
$$+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}.$$

Deci : $A=B$.

**VII.A.65.** Obținem :

$$n=\sqrt{6-2\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}=\sqrt{6-2|1+\sqrt{3}|+|2-}$$
$$\overline{-\sqrt{3}|}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}+(2-\sqrt{3})=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}+(2-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1+2-$$
$$-\sqrt{3}=1.$$

**VII.A.66.**

a) $N=3-\sqrt{5}+3+\sqrt{5}+2\sqrt{9-5}=6+4=10.$

b) $E_1=27\sqrt{6}.$

$E_2=2\sqrt{3}-6\sqrt{3}+12\sqrt{3}-20\sqrt{3}+15\sqrt{3}=3\sqrt{3}.$

Deci : $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{27\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{9\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\dfrac{9\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=9\sqrt{2}.$

**VII.A.67.**

$$n^{3k}-n^k+7=n^k(n^{2k}-1)+7=n^k(n^k-1)(n^k+1)+7,$$

adică un număr impar, $n^k(n^k-1)(n^k+1)$ fiind număr par ca produs de numere întregi consecutive.

Așadar, numărul impar $n^{3k}-n^k+7$ nu poate fi produsul unor numere întregi consecutive.

**VII.A.68.**

$$9(25^p \cdot 11^{2p+1} - 55^{2p}) = 9(55^{2p} \cdot 11 - 55^{2p}) = 9 \cdot 10 \cdot 55^{2p} = M \cdot 30.$$

$$p(1 - p^8) = p(1 - p^4)(1 + p^4) = p(1 - p^2)(1 + p^2)(1 + p^4) =$$
$$= -(p - 1)\,p\,(p + 1)(p^2 + 1)(p^4 + 1) = M \cdot 30 \cdot p(1 - p^8),$$

este evident multiplu de 2, de 3 și de 5, deoarece $p = M \cdot 5$ dacă $p = 5k$, $p - 1 = M \cdot 5$ dacă $p = 5k + 1$, $p^2 + 1 = M \cdot 5$ dacă $p = 5k + 2$ și dacă $p = 5k + 3$, $p^4 + 1 = M \cdot 5$ dacă $p = 5k + 4$, $k \in \mathbf{N}$.

**VII.A.69.** Trebuie ca numărul $\dfrac{n^5 - n^3 - 2n^2}{n - 1}$ să fie număr natural oricare ar fi $n$ natural și $n > 1$. Obținem :

$$\frac{n^5 - n^3 - 2n^2}{n - 1} = \frac{n^3(n - 1)}{n - 1} - \frac{2n^2}{n - 1} = n^3 - \frac{2n^2 - 2n + 2n}{n - 1} =$$
$$= n^3 - 2n - \frac{2n}{n - 1} = n^3 - 2n - 2 - \frac{2}{n - 1};$$

$\dfrac{n - 1}{2}$ este natural dacă $n - 1 = 1$ sau $n - 1 = 2$. În concluzie $n - 1$ divide $n^5 - n^3 - 2n^2$ pentru $n = 2$ și $n = 3$.

**VII.A.70.** $M = 5n^2 - 20n + 23 = 5n(n - 4) + 23$. Numărul $5n(n - 4)$ are ultima cifră 0 sau 5, de unde rezultă că ultima cifră a numărului $M$ este 3 sau 8 și asemenea pătrat nu există.

**VII.A.71.** a) Din relația dată : $p = n^2 + n + 1$, deci : $4p - 3 = 4n^2 + 4n + 4 - 3 = (2n + 1)^2$. La fel : $p - 1 = n^2 + n = n(n + 1)$.

b) Avem :

$$39\,601 = 199^2 = (2 \cdot 99 + 1)^2 = 4 \cdot 99^2 + 4 \cdot 99 + 4 - 3 =$$
$$= 4(95^2 + 95 + 1) - 3,$$

deci : $n = 99$ și $p = 99^2 + 99 + 1$.

**VII.A.72.** Numerele sînt deci de forma : $p = n^2 - 4$ sau $p = (n - 2)(p + 2)$ de unde rezultă : $n - 2 = 1$ și $n + 2 = p$ sau $n - 2 = p$ și $n + 2 = 1$ sau $n - 2 = -1$ și $n + 2 = -p$ sau $n - 2 = -p$ și $n + 2 = -1$. Rezultă numerele prime $-3$ și 5 deoarece $-3 = 1^2 - 4$ și $5 = 3^2 - 4$.

**VII.A.73.** $a + 2b = 3Nk_1$ și $2a + b = 3Nk_2$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$ implică : $a - b = 3N(k_2 - k_1)$. Atunci : $a^3 - 3a^2b + 2b^3 = (a - b)^2(a + 2b) = 9N^2(k_2 - k_1)^2 \cdot 3Nk_1 = 27N^3k_1(k_1 - k_2)^2 = 27N^3k$, unde $k \in \mathbf{Z}$, $k = (k_1 - k_2)^2k_1$.

**VII.A.74.** $f(x) = x + 1$ implică $f^2(x) = (x + 1)^2$.

Relația devine : $(x + 1986 + 1)^2 - (x - 1986 + 1)^2 = 4(x + 1)^2$
sau : $(x + 1987 - x + 1985)(x + 1987 + x - 1985) = 4(x + 1)^2$
sau : $3\,972(2x + 2) = 4(x + 1)^2$ sau $1986(x + 1) = (x + 1)^2$
sau : $(x + 1)(x + 1 - 1986) = 0$, adică $x = -1$ și $x = 1985$.

**VII.A.75.**

a) $f_m(x)=\sqrt{(x+1)^2}-m\sqrt{(x-2)^2}=|x+1|-m|x-2|$;

$$g(x)=|x+1|-|x-2|=\begin{cases}-3, & x\in(-\infty,\ -1)\\ 2x-1, & x\in[-1,\ 2]\\ 3, & x\in(2,\ +\infty)\end{cases}$$

b) $f(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$.

**VII.A.76.** a) Polinoamele $P$ şi $Q$ se scriu sub forma canonică astfel : $P(X)=-2X+1$, $Q(X)=X-3$.

Avem : $P[Q(X^2)]-Q[P(X^2)]=P(X^2-3)-Q(-2X^2+1)=$
$=-2(X^2-3)+1-(-2X^2+1)+3=9$.

b) Se obţine graficul următor :

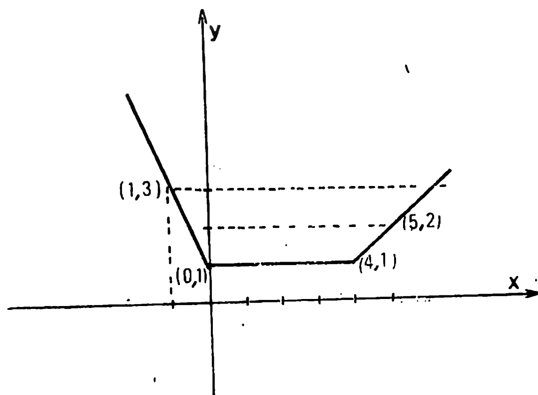



*Fig. VII.A.76.*

**VII.A.77.** Obţinem :

$$N=\frac{[(6^n)^2+12\cdot6^n+36]-4}{5(6^n+8)}=\frac{(6^n+6)^2-4}{5(6^n+8)}=$$
$$=\frac{(6^n+6-2)(6^n+6+2)}{5(6^n+8)}=\frac{6^n+4}{5},$$

$6^n+4$ este multiplu de 10 şi deci, imediat, $N\in\mathbf{N}$.

**VII.A.78.** Produsul a două numere naturale consecutive este un număr natural par.

Avem : $n^2-n+2=n(n-1)+2=2p+2$, $p\in\mathbf{N}$, deci un număr natural par. La fel : $n^2+n+2=n(n+1)+2$, este un număr par. Rezultă că fracţia se simplifică întotdeauna cu 2.

**VII.A.79.** Fracţia $F$ se mai poate simplifica :

$$F(x, y)=\frac{(x^2+y^2+2xy)-4}{(x^2-4x+4)-y^2}=\frac{(x+y)^2-4}{(x-2)^2-y^2}=$$

$$=\frac{(x+y-2)(x+y+2)}{(x-y-2)(x+y-2)}=\frac{x+y+2}{x-y-2}.$$

$F(x, 1)==\dfrac{x+3}{x-3}=1+\dfrac{6}{x-3}$. $F(x, 1)\in \mathbf{Z}$ dacă şi numai dacă $x-3$ este divizor al lui 6, deci $x\in\{4, 2, 5, 1, 6, 0, 9\}$.

**VII.A.80.**

$$P=\frac{(2^{2n})^2+2\cdot 2^{2n}+1}{(2^n)^2}=\left(\frac{2^{2n}+1}{2^n}\right)^2.$$

**VII.A.81.**

$$E(x)=\frac{(4x^2-1)^2}{(2x+1)^2}\ ;\ f(x)=\sqrt{\frac{(4x^2-1)^2}{(2x+1)^2}}=\sqrt{\frac{(2x-1)^2(2x+1)^2}{(2x+1)^2}}=$$

$$=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|.$$

Se observă că $x=-\dfrac{1}{2}$ anulează numitorul, deci nu face parte din domeniul de definiţie al funcţiei $f$. Ţinînd cont de definiţia modulului, rezultă că urmează să trasăm graficul funcţiei :

$$f:\mathbf{R}\setminus\left(\frac{1}{2}\right)\to \mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases}-2x+1, & x\in\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\\ 2x-1, & x\in\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\end{cases}$$

**VII.A.82.**

$$F(a, b)=\frac{(a^2-2ab+b^2)-2(a-b)+1}{(a^2-2ab+b^2)-1}=$$

$$=\frac{(a-b)^2-2(a-b)+1}{(a-b)^2-1}=\frac{(a-b-1)^2}{(a-b-1)(a-b+1)}=\frac{a-b-1}{a-b+1}=$$

$=1-\dfrac{2}{a-b+1}$. $F(a, b)\in\mathbf{Z}$ implică $\dfrac{2}{a-b+1}\in\mathbf{Z}$ de unde rezultă $a-b+1$ divizor al lui 2. Rezultă valorile lui $F: -1\ ;\ 0\ ;\ 2\ ;\ 3$.

**VII.A.83.**

$$\text{Avem : } F(x, y)=\frac{x^4(x-y)-y^4(x-y)}{x^3(x-y)-xy^2(x-y)}=\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{(x-y)(x^3-xy^2)}=$$

$$=\frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x(x^2-y^2)}=\frac{x^2+y^2}{x}.$$

$$F(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)=\frac{6}{\sqrt{2}-1}=6(\sqrt{2}+1).$$

**VII.A.84.** $x+\frac{1}{x}=y+\frac{1}{y}$ implică $x-y=\frac{x-y}{xy}$ sau, ţinînd cont de ipoteză $(x-y)\left(1-\frac{1}{b}\right)=0.$

Dacă $b\neq 1$ rezultă $x=y$. Din ipoteză avem, deci : $x+\frac{1}{x}=a$ şi $x^2=b$. Din $x+\frac{1}{x}=a$ rezultă $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$. Rezultă acum imediat relaţia dintre $a$ şi $b$ : $(b+1)^2=a^2b$.

**VII.A.85.**

$$\text{Avem : } \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqslant \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqslant \frac{(a^3+b^3)+(a^2b+ab^2)}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \leqslant \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{4} \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{2} < a^2+b^2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geqslant 0$, adevărat pentru orice $a$, $b$ reale.

**VII.A.86.** Aplicăm inegalitatea $m_g \leqslant m_a$, unde prin $m_g$ am notat media geometrică $m_g=\sqrt{ab}$, a numerelor $a$ şi $b$, iar prin $m_a=\frac{a+b}{2}$ media aritmetică a aceloraşi numere.

Avem $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ sau $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, de unde rezultă că valoarea maximă a lui $ab$ este $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$; $ab=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow a=b$ şi, imediat $a=b=\frac{k}{2}$.

**VII.A.87.** În general avem $a+a^{-1}=a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, $\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant$ $\geqslant 2+2=4=2\cdot 2\cdot 1986=2\cdot 993$, deci se poate scrie o sumă de 993 termeni de forma $a+a^{-1}$ cu orice $a$ real, strict pozitiv care să satisfacă cerinţa dată.

**VII.A.88.** $S$ se mai poate scrie echivalent :

$$S=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{4+5}+\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{5+6}+\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}{6+7}+\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{8}}{7+8}+\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{9}}{8+9}+\frac{\sqrt{9}\cdot\sqrt{10}}{9+10}.$$

Să observăm că, în general : $\frac{a \cdot b}{a^2+b^2} < \frac{1}{2}$ pentru $a \neq b$. Deci, de exemplu, $\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{4+5} = \frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{4})^2+(\sqrt{5})^2} < \frac{1}{2}$.

Aşadar $S < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 3$.

**VII.A.89.** Avem : $0 \leqslant (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$, deci $2(ab+ac+bc)+a^2+b^2+c^2 \geqslant 0$ sau ţinînd cont de ipoteză : $ab+bc+ca \geqslant -\frac{1}{2}$.

De asemenea, din $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0$, rezultă $a^2+ b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$ şi ţinînd cont de ipoteză rezultă $ab+bc+ ca \leqslant 1$.

**VII.A.90.**

Avem : $\frac{\overline{xyz}}{x+y+z} = \frac{100x+10y+z}{x+y+z} < \frac{100x+100y+100z}{x+y+z} = 100$.

Exemplu : $\frac{600}{6} = 100$.

**VII.A.91.** Inegalitatea se scrie echivalent :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 \leqslant 0. \qquad (1)$$

Dar :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 \geqslant 0. \qquad (2)$$

Relaţia (2) are loc fiind vorba despre o sumă de pătrate.

Relaţia (1) şi (2) trebuie să aibă loc simultan, ceea ce este posibil numai în cazul cînd are loc egalitatea (antisimetria relaţiei de inegalitate).

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

Soluţia este : $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{3}{2}$.

**VII.A.92.** Prin calcul direct se obţin inegalităţi echivalente sau se efectuează majorări (minorări) convenabile ale fracţiilor. De exemplu :

$$\frac{1+2^n}{1+3^n} < \frac{1+2^n}{3^n} < \frac{2^{n-1}+2^n}{3^n} = \frac{2^{n-1}\cdot(1+2)}{3^{n-1}\cdot 3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

**VII.A.93.** Membrul stîng al inegalităţii se mai poate scrie succesiv :

$$\frac{(x^2+y^2)^2+x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=1+\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2\leqslant 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2<2.$$

Am utilizat faptul că $\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}$ oricare ar fi $x$, $y\in\mathbf{R}$, cu $x$ sau $y$ nenul, inegalitate care se verifică imediat.

**VII.A.94.** Avem evident

$$\frac{1}{\sqrt{1}}>\frac{1}{\sqrt{9\,999}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{9\,999}},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{9\,999}}>\frac{1}{\sqrt{9\,998}}-\frac{1}{\sqrt{9\,999}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{9\,999}}.$$

Adunînd membru cu membru aceste inegalităţi obţinem :

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\quad+\frac{1}{\sqrt{9\,999}}>\underbrace{\frac{1}{\sqrt{9\,999}}+\frac{1}{\sqrt{9\,999}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9\,999}}}_{\text{de } 9\,999 \text{ ori}}=$$

$$=\frac{9\,999}{\sqrt{9\,999}}=\sqrt{9\,999}>99{,}99.$$

**VII.A.95.** Au loc evident, inegalităţile

$$\frac{1}{p+1}>\frac{1}{2p},\ \frac{1}{p+2}>\frac{1}{2p},\ \ldots,\ \frac{1}{2p}\geqslant\frac{1}{2p},$$

oricare ar fi $p>1$. Adunînd membru cu membru aceste inegalităţi, obţinem

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p}>\underbrace{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p}+\ldots+\frac{1}{2p}}_{\text{de } p \text{ ori}}=\frac{p}{2p}=\frac{1}{2}$$

**VII.A.96.** a) Studiem semnul expresiei $x+\frac{1}{x}=\frac{x^2+1}{x}$. Aplicînd definiţia modulului deducem că $\left|x+\frac{1}{x}\right|=x+\frac{1}{x}$, pentru $x>0$ şi $\left|x+\frac{1}{x}\right|=$ $=-x-\frac{1}{x}$ pentru $x<0$. În fiecare caz inegalitatea se verifică imediat.

b) Expresia se scrie echivalent :

$$\frac{1}{\frac{x+1}{x}-1}+\frac{1}{\frac{x+1}{x}+1}\leqslant\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2+1}=\frac{4}{3},$$

unde am ţinut cont de *a*).

**VII.A.97.** b) Observăm că pentru $x = y = z = 0$, $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} = 3$ dacă $2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} > 3$ rezultă că, cel puțin unul dintre numerele $x$, $y$, $z$, este nenul. Fie $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, atunci : $2^1 + 2^0 + 2^1 = 5 > 4$ ş.a.m.d.

**VII.A.98.** b) $x^2 + y^2 = z^2$ implică $x^2 \leqslant z^2$ şi $y^2 \leqslant z^2$. Deoarece x, y, z sînt pozitive rezultă $x < z$ şi $y < z$. $x < z$ implică faptul că există $a$, $0 < a_1 < 1$ astfel încît $x = a_1 \cdot z$. Analog există $a_2$, $0 < a_2 < 1$ astfel încît $y = a_2 \cdot z$. Rezultă deci că $xy = a_1 \cdot a_2 \cdot z_2$. Punem $a_1 \cdot a_2 = a$ şi obținem ceea ce trebuia demonstrat.

**VII.A.99.** În $m$, $n$ şi $p$, inegalitatea se scrie echivalent :

$$\frac{n+p}{2m} + \frac{m+p}{2n} + \frac{m+n}{2p} \geqslant 3, \text{ sau } \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{n}\right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{m}{p}\right) + \left(\frac{n}{p} + \frac{p}{n}\right) \geqslant 6,$$

ceea ce este adevărat ținînd cont că fiecare paranteză este mai mare sau cel puțin egală cu 2.

**VII.A.100.** Amplificăm a doua fracție cu $a$, a treia fracție cu $ab$ şi ținem cont de ipoteza $abc = 1$. Obținem :

$$\left(\frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab}\right)^n = \left(\frac{a+ab+1}{ab+a+1}\right)^n = 1.$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

**VII.A.101.**

$$1. \quad a_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots +$$

$$+ \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \text{ deci : } a_8 = 1 - \frac{1}{\sqrt{8+1}} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Cum } \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N}^*, \text{ rezultă că } a_n > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Trebuie deci determinate $n \in \mathbf{N}$, $n \leqslant 15$ astfel încît $\sqrt{n+1} \in \mathbf{Q}$. Fie $p \in \mathbf{N}$, $p = \sqrt{n+1}$, adică $n = p^2 - 1$. Obținem : $n \in \{0, 3, 8, 15\}$.

**VII.A.102.** La numărător sînt 1 985 termeni 1 sau $-1$ după cum puterea este pară sau impară. Aceşti termeni se reduc doi cîte doi cu excepția ultimului $(-1)^{1985} = -1$. Observăm că $1\,985^n$ este impar, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ şi, deci, la numitor obținem $1\,985 \cdot (-1)$. Rezultatul final este

$$\frac{1}{1\,985}.$$

**VII.A.103.** Ţinem cont de faptul că $(-1)^{2k}=1$ şi $(-1)^{2k+1}=-1$, oricare ar fi $k\in\mathbf{N}$ şi scriem convenabil:

$$E=\frac{(-5+10)+(-15+20)+\ldots+(-1\,975+1\,980)-1\,985}{(-1)^{4k+6}}=$$

$$=\frac{5\cdot198-1\,985}{(-1)^{2(2k+3)}}=-995.$$

**VII.A.104.** 1.

$$h(1)+h(2)+\ldots+h(100)=(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+\ldots+$$
$$+\ \ .+(2\cdot100+1)=(2\cdot1+2\cdot2+\ldots+2\cdot100)+$$
$$+\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{\text{de 100 ori}}=2(1+2+\ldots+100)+100=10\,000+100=$$
$$=10\,200.$$

2. $\dfrac{h(n)}{f(n)}<2$ este echivalentă cu $\dfrac{2n+1}{n+3}<2$ sau $2n+1<2n+6$, evident.

**VII.A.105.** a)

$$E=10^9-10^8(10-1)-10^7(10-1)-\ldots-10(10-1)-1=$$
$$=(10^9-10^9)+(10^8-10^8)+(10^7-10^7)+\ldots-10^2+(10-1)=9.$$

b) Procedînd ca mai sus avem

$$F=(n+1)^n-(n+1)^{n-1}(n+1-1)-\ldots-(n+1)(n+1-1)-1=$$
$$=[(n+1)^n-(n+1)^n]+[(n+1)^{n-1}-(n+1)^{n-1}]-\ldots-$$
$$-\ldots-(n+1)-1=n.$$

**VII.A.106.** Putem presupune că în prima cutie punem o bilă, în a doua cutie două bile, ş.a.m.d., în a $n$-a cutie $n$ bile. În cele $n$ cutii vom avea:

$1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{n^2+n}{2}$, mai puţin, deci o bilă din cele $\dfrac{n^2+n+2}{2}$. Această bilă o putem pune în cutia cu $n$ bile.

Să observăm că $\dfrac{n^2+n-2}{2}=\dfrac{n(n+1)}{2}-1$, deci notînd că mai sus deducem că nu se satisfac condiţiile problemei.

**VII.A.107.** Avem, de exemplu, $2x=10-3y$ (1). $10-3y\in\mathbf{N}$ implică $10-3y\geqslant0$ sau $3y\leqslant10$, de unde rezultă $y\in\{0, 1, 2, 3\}$. Din (1) rezultă perechile (0, 5) şi (2, 2).

**VII.A.108.** Ecuaţia se scrie echivalent

$$x(y+3) = -2y-5 \text{ sau } x = \frac{-2y-5}{y+3}$$

$$\text{sau } x = -2 + \frac{1}{y+3} \cdot \frac{1}{y+3} \in \mathbf{Z},$$

implică situaţiile $(-3\ ;\ -4)$, $(-1\ ;\ -2)$.

**VII.A.109.** Pentru $x$ şi $y$ nenuli, ecuaţiile se scriu echivalent

$$x = 2 + \frac{8}{3y-4} \text{ ş.a.m.d.}$$

Obţinem soluţiile : $(-6\ ;\ 1)$, $(6\ ;\ 2)$, $(3\ ;\ 4)$.

**VII.A.110.** Avem

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 14\cdot 15}{2^x\cdot 3^y\cdot 5^z} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3(2^2)\cdot 5\cdot (2\cdot 3)\cdot 7\cdot 2^3\cdot 3^2\cdot (2\cdot 5)\cdot 11\cdot (2^2\cdot 3)\cdot 13\cdot (2\cdot 7)\cdot 3\cdot 5}{2^x\cdot 3^y\cdot 5^z} =$$

$$= \frac{2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13}{2^x\cdot 3^y\cdot 5^z},$$

deci ecuaţia $\frac{2^{11}\cdot 3^6\cdot 5^3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 13}{2^x\cdot 3^y\cdot 5^z} = 7^2\cdot 11\cdot 13$ (=27 007). de unde rezultă

deci $x = 11$ ; $y = 6$ ; $z = 3$.

**VII.A.111.** Ecuaţia este echivalentă cu următoarea

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) + (u^2 - 2u + 1) = 0.$$

sau : $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (u-1)^2 = 0$, care are soluţiile $x = y = z = u = 1$.

**VII.A.112.** Avem $x = [x] + \{x\}$, unde prin $\{x\}$ am notat partea fracţionară a numărului $x$. Ecuaţia se scrie echivalent $[x] - 1 = 2\cdot\{x\}$ sau $\{x\} = \frac{[x]-1}{2}$. $0 \leqslant \{x\} < 1$ implică $1 \leqslant [x] < 3$ deci $[x] = 1$ şi $[x] = 2$.

Rezultă pentru $\{x\}$, respectiv valorile $0\ ;\ \frac{1}{2}$. Din $x = [x] + \{x\}$ se obţin soluţiile $1$ şi $\frac{5}{2}$ ale ecuaţiei date.

**VII.A.113.** Utilizăm relația $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$. Obținem :

$$[x]+\left[x+\frac{1}{4}\right]+\left[x+\frac{2}{4}\right]+\left[x+\frac{3}{4}\right]=[x]+\left[x+\frac{2}{4}\right]+\left[x+\frac{1}{4}\right]+$$
$$+\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]=[2x]+\left[2x+\frac{1}{2}\right]=[4x].$$

**VII.A.114.** a) $x=1$.

b) $(a+1)x=2(a+1)$. Pentru $a\neq -1$ ecuația are soluția unică $x=2$, pentru $a=-1$, orice $x$ real este soluție a ecuației.

c)

$$|x-1|+|2x-2|+|3x-3|=$$
$$=|x-1|+2|x-1|+3|x-1|=6|x-1|.$$

Rezultă $x=1$.

**VII.A.115.** Pentru $k$ număr natural par se obține ecuația echivalentă $-4y+3=15$ satisfăcută deci pentru orice $x$ întreg și pentru $y=-3$.

Pentru $k$ număr natural impar se obține ecuația $-2x+3=15$ satisfăcută pentru $x=-6$ și pentru orice $y$ întreg.

**VII.A.116.** Din enunțul problemei rezultă că 20% din elevi nu au rezolvat primul subiect, iar 30% nu au rezolvat al doilea subiect. Deci 50% nu au rezolvat ambele subiecte, iar restul de 50% au rezolvat ambele subiecte. Cum se știe că 45 elevi au rezolvat ambele subiecte, rezultă că, în total au fost 90 de concurenți.

Altfel : fie $x$ numărul total de concurenți. Rezultă ecuația :

$$\frac{80}{100}x+\frac{70}{100}x-45=x \text{ cu soluția } x=90.$$

## REZOLVĂRILE ŞI REZULTATELE PROBLEMELOR PENTRU CLASA A VII-A
## GEOMETRIE

**VII.G.1.** Deoarece $AM = NC$, $m(\widehat{A}) = m(\widehat{C}) = 60°$, $AC = BC$, $\triangle AMC \equiv$
$\equiv \triangle CNB$ (L.U.L.). Rezultă că $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle PCN$.

Notăm $\alpha = m(\widehat{PBC})$.

Avem $m(\widehat{MPN}) = m(\widehat{BPC}) = 180° - (m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PCB})) =$
$= 180° - (\alpha + 60° - \alpha) = 120°$.

Deci $m(\widehat{MPN}) = 120° =$ constant. (Vezi fig. VII.G.1.)

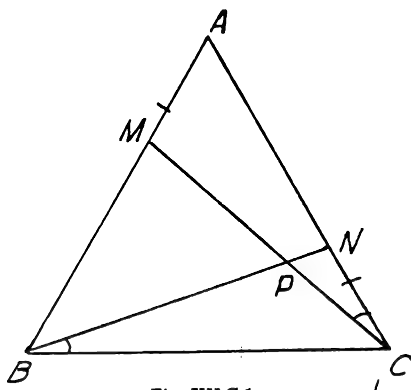


*Fig. VII.G.1.*

**VII.G.2.** a) (Vezi fig. VII.G.2.) Notăm $m(\widehat{BAA'}) = \alpha$. În triunghiul dreptunghic $AHD$, $m(\widehat{AHD}) = 90° - \alpha$. Dar $\sphericalangle AHD \equiv \sphericalangle A'HC$, fiind opuse la vîrf. Rezultă că $m(\widehat{A'HC}) + \alpha = 90°$, deci $m(\widehat{AA'C}) = 90°$, deci $AA'$ este înălţime. Cum $AA'$ este şi bisectoare, rezultă că triunghiul $ABC$ este isoscel, avînd $AB = AC$.

b) Din a) rezultă că dreptele $AH$ şi $BC$ sînt perpendiculare. Din ipoteză, $CH$ şi $AB$ sînt perpendiculare. Rezultă că $H$ este ortocentrul triunghiului $ABC$, deci $BH$ şi $AC$ sînt perpendiculare.

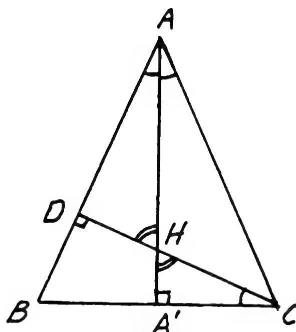



*Fig. VII.G.2.*

**VII.G.3.** (Vezi fig. VII.G.3.). Dreapta $AA'$ este axă de simetrie a triunghiului $ABC$, deci $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = x$. Dreapta $AC$ este axă de simetrie a figurii $ADCD'$, deci $m(\widehat{CD'A}) = m(\widehat{CDA}) = 90°$.

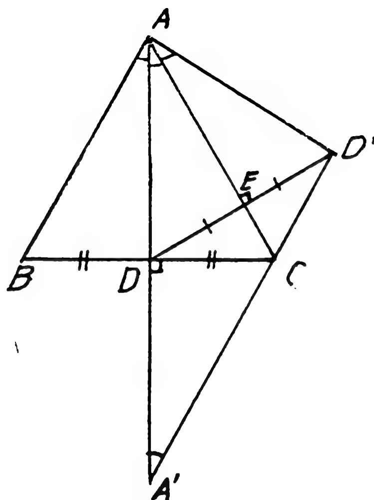



*Fig. VII.G.3.*

Dreapta $CD$ este axă de simetrie a triunghiului $ACA'$, deci $m(\widehat{CA'A}) = x$. Rezultă că în triunghiul $AA'D'$ avem relația: $2x + x = 90°$, deci $x = \frac{90°}{3} = 30°$.

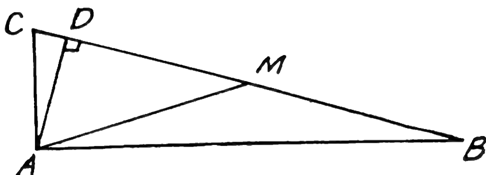



*Fig. VII.G.4.*

**VII.G.4.** Fie $A$ unghiul drept al triunghiului $ABC$ și $D$ proiecția lui $A$ pe ipotenuză. Fie $M$ mijlocul segmentului $BC$. (Vezi fig. VII.G.4.).

Triunghiul $MAB$ este isoscel. (Teorema medianei în triunghiul dreptunghic). Rezultă că : $m(\widehat{MAB}) = 15°$.

Deci $m(\widehat{DMA}) = 30°$. (Teorema unghiului exterior). Rezultă că, în triunghiul dreptunghic $DAM$, $AD = \frac{AM}{2}$ Dar $AM = \frac{BC}{2}$. Rezultă că $AD = \frac{1}{4} \cdot BC$.

**VII.G.5.** (Vezi fig. VII.G.5.). Unghiul $AED$ este un unghi exterior al triunghiului $AEC$.

Rezultă că $m(\widehat{AED}) = 45° + 15° = 60°$. Rezultă că $m(\widehat{DAE}) = 30°$.

Deci, în triunghiul dreptunghic $ADE$, avem : $DE = \frac{1}{2} \cdot AE$. (1)

Deoarece în triunghiul $ABC$, $AO$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei, triunghiul $AOC$ este isoscel. Deci $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = 15°$.

Unghiul $EOA$ este unghi exterior triunghiului $AOC$.

Rezultă că : $m(\widehat{EOA}) = 30°$.

Deci $m(\widehat{EAO}) = m(\widehat{EAC}) - m(\widehat{OAC}) = 45° - 15° = 30°$. Rezultă că triunghiul $AEO$ este isoscel, deci $AE = OE$. (2)

Din (1) și (2) rezultă : $DE = \frac{1}{2} \cdot OE$.

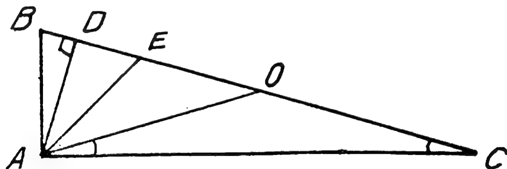



*Fig. VII.G.5.*

**VII.G.6.** Fie $2\alpha = m(\widehat{CAB})$, $2\beta = m(\widehat{ABC})$. (Vezi fig. VII.G.6). Avem $\alpha + \beta = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$.

Unghiul *KOB* este unghi exterior triunghiului *AOB*. Rezultă că $m(\widehat{KOB}) = 60^\circ$. Deci unghiurile *ECK* şi *EOK* sînt suplementare. Deci şi unghiurile *OEC*, *OKC* sînt suplementare.

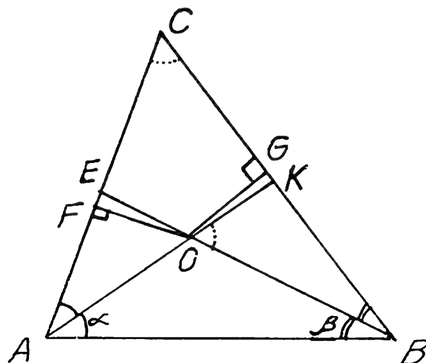



*Fig. VII.G.6.*

Fie *F*, respectiv *G* proiecţiile lui *O* pe *AC*, respectiv *BC*. În ipotezele problemei sînt posibile următoarele trei situaţii :

I. Dacă $\widehat{A} > \widehat{C}$, atunci $\alpha > \beta$ şi *F* este între *A* şi *E*, iar *G* între *K* şi *C*.

II. Dacă $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C$, atunci triunghiul *ABC* este echilateral şi afirmaţia de demonstrat este evidentă.

III. Dacă $\widehat{A} < \widehat{C}$, atunci $\alpha < \beta$ şi *F* este între *E* şi *C*, iar *G* între *B* şi *K*. Acest caz se tratează analog cu I.

I. Deoarece *O* este punctul de intersecţie a două bisectoare ale triunghiului *ABC*, dreapta *OC* este bisectoarea unghiului *C* în triunghiul *ABC*, deci $OF = OG$. (1)

Dar $\sphericalangle OEF \equiv \sphericalangle OKG$, avînd acelaşi suplement. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\triangle EOF \equiv \triangle KOG$ (C.U.).

Rezultă că $OE = OK$.

**VII.G.7.** Pentru că *M* este interior triunghiului *ABC*, rezultă că semidreapta *AM* este interioară unghiului *BAC*.

În triunghiurile *BAM* şi *DAM*, avem : $AM = MA$ ; $AB = AD$ iar $\widehat{BAM} < \widehat{DAM}$. Conform teoremei articulaţiei, rezultă că $MB < MD$. (Vezi fig. VII.G.7.).

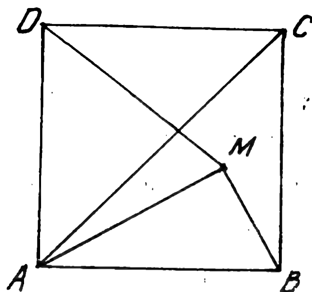



*Fig. VII.G.7.*

**VII.G.8.** Fie $A$, $B$, $C$, $D$ vîrfurile trapezului şi $O$ intersecţia diagonalelor $AC$ şi $BD$. (Vezi fig. VII.G.8.).

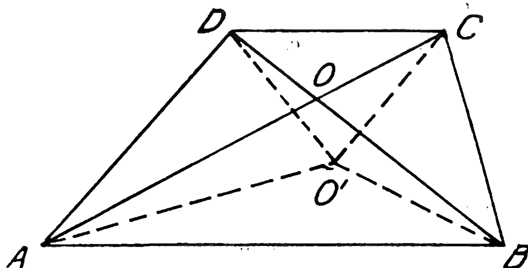



*Fig. VII.G.8.*

Vom arăta că, oricare ar fi $O'$ în interiorul trapezului, $O' \neq O$, avem : $OA + OB + OC + OD < O'A + O'B + O'C + O'D$.

Fie $O'$ un punct fixat în interiorul trapezului $ABCD$.

În triunghiul $AO'C$, avem : $AC < O'A + O'C$. (1)

În triunghiul $BO'D$, avem : $BD < O'B + O'D$. (2)

Însumînd relaţiile (1) şi (2) rezultă : $AC + BD < O'A + O'B + O'C + O'D$.

Adică : $OA + OB + OC + OD < O'A + O'B + O'C + O'D$. (3)

Cum $O'$ a fost arbitrar fixat în interiorul trapezului, rezultă că relaţia (3) este valabilă pentru orice punct $O'$ din interiorul trapezului. Deci suma distanţelor de la un punct din interiorul trapezului la vîrfuri este minimă cînd punctul se află la intersecţia diagonalelor.

**VII.G.9.** a) Avem :

$$E(a, b, c) = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 =$$
$$= (2ab - a^2 - b^2 + c^2)(2ab + a^2 + b^2 - c^2) =$$
$$= [c^2 - (a - b)^2] \cdot [(a + b)^2 - c^2] =$$
$$= (c - a + b)(c + a - b)(a + b - c)(a + b + c).$$

Notînd $2p = a + b + c$, rezultă

$$E(a, b, c) = (2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c) \cdot 2p =$$
$$= 16p(p - a)(p - b)(p - c).$$

Deoarece fiecare factor este strict pozitiv, rezultă că $E(a, b, c) > 0$, pentru orice numere $a$, $b$, $c$ reprezentînd lungimile laturilor unui triunghi.

b) Întrucît $a$, $b$, $c$ sînt arbitrare, este suficient să arătăm că $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$. (Analog se arată că $\sqrt{b} < \sqrt{a} + \sqrt{c}$; $\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$).

Avem $a < b + c$. Cu atît mai mult $a < b + c + 2\sqrt{bc}$, $(2\sqrt{bc} > 0)$.

Rezultă că $a < (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$, deci $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Deci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

**VII.G.10.** Avem $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Înmulțind ambii membri ai egalității cu 2 și, trecînd totul în membrul întîi, obținem :

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0.$$

Grupînd termenii convenabil, avem

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) = 0.$$

Adică : $(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 0$.

O sumă de numere pozitive este nulă dacă și numai dacă fiecare termen al sumei este nul.

Rezultă că : $\begin{cases} a - b = 0 \\ a - c = 0 \\ b - c = 0 \end{cases}$

Adică $a = b = c$. Deci triunghiul $ABC$ este echilateral.

**VII.G.11.** a) Orice două puncte distincte determină o dreaptă. Fie $A_1$, $A_2, \ldots, A_{101}$ cele 101 puncte cu proprietatea că oricare 3 sînt necoliniare. Mulțimile : $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1, A_3\}$, $\{A_1, A_4\}, \ldots, \{A_1, A_{101}\}$ determină 100 drepte. La fel mulțimile : $\{A_2, A_1\}$, $\{A_2, A_3\}, \ldots, \{A_2, A_{101}\}$ ș.a.m.d.

În total, $100 \cdot 101$ drepte. Dar dreptele determinate de perechile de puncte $(A_i, A_j)$ și $(A_i, A_j)$, pentru orice $i \neq j$, coincid. Deci numărul de drepte distincte determinate de 101 puncte, oricare trei necoliniare, este $\frac{100 \cdot 101}{2} = 5\,050$.

b) Dacă punctele $A_1, A_2, \ldots, A_{101}$ sînt coliniare, atunci ele determină o singură dreaptă. Numărul minim cerut se obține în situația în care unul singur din aceste puncte nu este coliniar cu celelalte. Fie acesta $A_1$. (În caz contrar, putem schimba numerotarea punctelor). Notăm $d$ dreapta determinată de punctele coliniare $A_2, A_3, \ldots, A_{101}$.

Mulțimile $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \ldots, \{A_1, A_{101}\}$ determină 100 drepte. Împreună cu $d$, vor fi 101 drepte.

**VIIG.12.** Unim toate punctele două cîte două și obținem $101 \cdot 50$ drepte, eventual nu toate diferite. Fie $d$ o altă dreaptă care nu este paralelă cu nici una dintre acestea. (Există o astfel de dreaptă). Fie $d' \perp d$. Cele 101 puncte din interiorul pătratului se proiectează pe $d'$ în 101 puncte distincte. (Dacă două puncte ar avea aceeași proiecție, atunci dreapta determinată de ele este perpendiculară pe $d'$, deci paralelă cu $d$, ceea ce este in contradicție cu construcția lui $d$). Din cele 101 puncte-proiecție, alegem pe cel din mijloc și dreapta căutată este dreapta perpendiculară pe $d'$ care trece prin punctul ales.

**VII.G.13.** Deoarece $m(\widehat{A}) = \frac{m(\widehat{BC})}{2}$ rezultă că $m(\widehat{BC}) = 60°$.

Deci $m(\widehat{BOC}) = 60°$. (1)

Dar $OC = OB = r$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că triunghiul $BOC$ este echilateral.

Deci $r = 10$ cm. (Vezi fig. VII.G.13.).

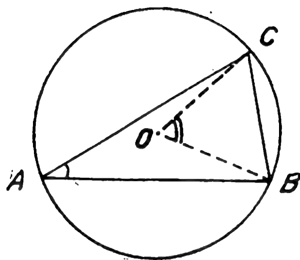



*Fig. VII.G.13.*

**VII.G.14.** Avem : $\triangle AOM \equiv \triangle BOM \equiv \triangle BCM$ (C.C.). Rezultă că $\sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle OMB \equiv \sphericalangle BMC$. Deci : $m(\widehat{AMC}) = 3m(\widehat{BMC})$. (Vezi fig. VII.G.14.).

*Fig. VII.G.14.*

**VII.G.15.** Fie $A$, $B$, $C$, $D$ vîrfurile unui patrulater inscriptibil şi $Q$, $N$ proiecţiile lui $A$ şi $C$ pe $BD$; $M$, $P$ proiecţiile lui $D$ şi $B$ pe $AC$. Pentru prescurtare, notăm : $\sphericalangle DAM = \sphericalangle 1$ ; $\sphericalangle DBC = \sphericalangle 2$ ; $\sphericalangle NPM = \sphericalangle 3$ ; $\sphericalangle MQN = \sphericalangle 4$.

Deoarece patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, rezultă: $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$. (1)

Deoarece patrulaterul $AMQD$ este inscriptibil, rezultă: $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 4$. (2)

Deoarece patrulaterul $NBCP$ este inscriptibil, rezultă: $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 3$. (3)

Din (1), (2) şi (3) rezultă că $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 4$.

Deci patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil.

*Fig. VII.G.15.*

**VII.G.16.** Fie $M$, $N$, $P$, $Q$ proiecţiile lui $O$ pe laturile $AB$, $BC$, $CD$, respectiv $AD$ ale patrulaterului $ABCD$. (Vezi fig. VII.G.16.).

În patrulaterele inscriptibile $AMOQ$ şi $QOPD$, avem :

$$\sphericalangle OQM \equiv \sphericalangle OAM$$
$$\sphericalangle OQP \equiv \sphericalangle ODP \quad (1)$$

În patrulaterele inscriptibile $BMON$ şi $NOPC$ avem :

$$\sphericalangle ONM \equiv \sphericalangle OBM$$
$$\sphericalangle ONP \equiv \sphericalangle OCP \quad (2)$$

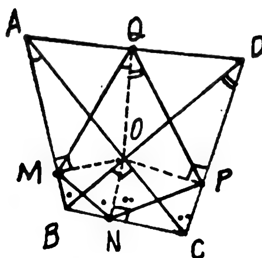



*Fig. VII.G.16.*

Ţinînd cont de relaţiile (1), (2) şi de faptul că dreptele $AC$ şi $BD$ sînt perpendiculare, rezultă :

$$m(\widehat{MQP}) + m(\widehat{MNP}) =$$
$$= m(\widehat{OQM}) + m(\widehat{OQP}) + m(\widehat{ONM}) + m(\widehat{ONP}) =$$
$$= m(\widehat{OAM}) + m(\widehat{ODP}) + m(\widehat{OBM}) + m(\widehat{OCP}) =$$
$$= m(\widehat{OAM}) + m(\widehat{OBM}) + m(\widehat{ODP}) + m(\widehat{OCP}) =$$
$$= 90° + 90° = 180°.$$

Deci $MNPQ$ este inscriptibil.

**VII.G.17.** (Vezi fig. VII.G.17.). Deoarece $OM \perp AC$, $ON \perp AB$, rezultă că $MN$ este linie mijlocie în triunghiul $ABC$.

Deci $MN \parallel BC$. Rezultă că $\sphericalangle ANM \equiv \sphericalangle ABC$. (1)

Patrulaterul $BCPQ$ fiind înscris în cerc rezultă că :

$$\sphericalangle QPM \equiv \sphericalangle QCB. \quad (2)$$

Unghiurile $QNA$ şi $BNC$ sînt opuse la vîrf, deci :

$$\sphericalangle QNA \equiv \sphericalangle BNC. \quad (3)$$

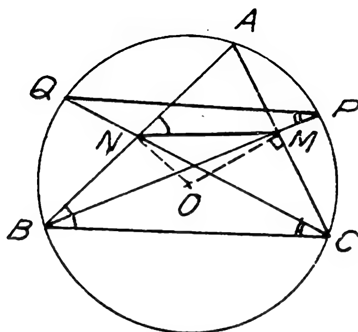


Fig. VII.G.17.

Din (1), (2) şi (3), ţinînd cont că suma măsurilor unghiurilor triunghiului $NBC$ este 180°, rezultă că $m(\widehat{QNM}) + m(\widehat{QPM}) = m(\widehat{BNC}) + m(\widehat{NBC}) + m(\widehat{BCN}) = 180°$, deci $MNQP$ este inscriptibil.

**VII.G.18.** Fie $E$ pe diagonala $AC$. (Vezi fig. VII.G.18.). Deoarece $ABCD$ este romb, $AC$ este bisectoarea $\sphericalangle BAD$. Deci $\triangle AQE \equiv \triangle AME$ (I.U.). Rezultă că triunghiul $MAQ$ este isoscel, deci $MQ \perp AC$. (1)

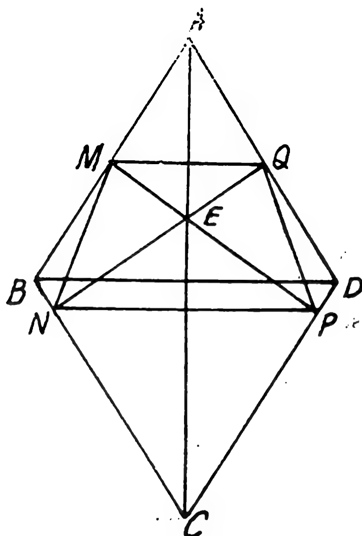


Fig. VII.G.18.

Analog, arătăm că $\triangle CNE \equiv \triangle CPE$ (I.U.) ; deci triunghiul $NCP$ este isoscel ; deci $CA$ este înălţimea acestui triunghi ; deci $NP \perp AC$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă $MQ \| NP$, deci $MNPQ$ este trapez. Se arată uşor că $\triangle BNM \equiv \triangle DPQ$ (L.U.L.). Rezultă că $MN = QP$, deci trapezul $MNPQ$ este isoscel şi, în concluzie, inscriptibil.

**VII.G.19.** a) Deoarece $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BD}$ rezultă că $CD \| AB$. Deci $ABDC$ este trapez şi fiind înscris în cerc, este isoscel. (Vezi fig. VII.G.19.).

b) Avem $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{BD}$. Rezultă că $m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COD}) = m(\widehat{DOB}) = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

În triunghiul $AOC$ avem $AO = OC = r$, $m(\widehat{AOC}) = 60^\circ$ Rezultă că triunghiul $AOC$ este echilateral. Analog, triunghiurile $COD$ şi $BOD$ sînt echilaterale. Deci patrulaterul $COBD$ este romb. Rezultă că diagonalele lui sînt perpendiculare, deci $m(\widehat{PNO}) = 90^\circ$. (1)

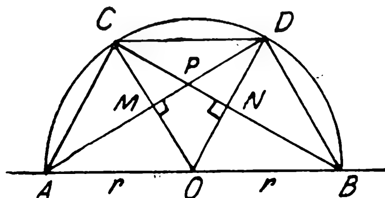



*Fig. VII.G.19.*

La fel, patrulaterul $AODC$ este romb, deci $AD \perp OC$. Rezultă că $m(\widehat{PMO}) = 90^\circ$. Din (1) şi (2) rezultă că patrulaterul $MONP$ este inscriptibil.

**VII.G.20.** Metoda 1

Patrulaterul $ABPC$ este înscris în cerc. Rezultă că $m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{CPB}) = 180^\circ$. (1)

Deoarece $M$ este mijlocul segmentelor $BC$ şi $PT$, patrulaterul $BPCT$ este paralelogram.

Deci $\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle BTC$.

Dar, $\sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle HTG$, fiind unghiuri opuse la vîrf. Rezultă că $\sphericalangle BPC \equiv \sphericalangle HTG$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $m(\widehat{HAG}) + m(\widehat{HTG}) = 180^\circ$. Deci $AHTG$ este inscriptibil. (Vezi fig. VII.G.20.)

METODA 2 :

Fie $I$ intersecţia dreptei $HC$ cu cercul. Avem :

$$m(\widehat{BAC})=\frac{m(\overset{\frown}{BP})+m(\overset{\frown}{PC})}{2}. \quad (3)$$

Deoarece $MP=MT$, $BM=MC$, $BPCT$ este paralelogram. (4)

Din (4) rezultă că $BPCI$ este trapez şi, fiind inscriptibil, este trapez isoscel. Deci $\sphericalangle PCI \equiv \sphericalangle BIC$. (5)

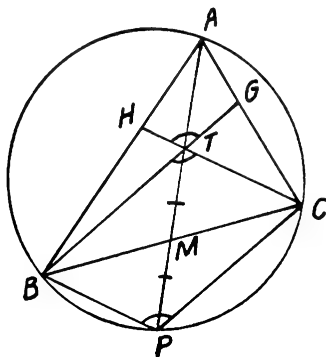



*Fig. VII.G.20.*

Dar $m(\widehat{BIC})=\frac{m(\overset{\frown}{BP})+m(\overset{\frown}{PC})}{2}$ (6)

Din (3), (4), (5) şi (6) rezultă că $\sphericalangle BTI \equiv \sphericalangle PCI \equiv \sphericalangle BIC \equiv \sphericalangle BAC$, deci $\sphericalangle BTH \equiv \sphericalangle HAG$, adică patrulaterul $AHTG$ este inscriptibil.

**VII.G.21.** a) (Vezi fig. VII.G.21.) Avem : $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FDE$, fiind unghiuri opuse în paralelogramul $ABCD$ ; (1)

$\sphericalangle EIF \equiv \sphericalangle AIC$, fiind unghiuri opuse la vîrf. (2)

Patrulaterul $AICB$ este înscris în cerc, deci unghiurile $AIC$ şi $ABC$ sînt suplementare. (3)

Din (1), (2) şi (3) rezultă că $m(\widehat{FDE})+m(\widehat{EIF})=180°$, deci patrulaterul $IEDF$ este inscriptibil.

b) Deoarece $IEDF$ este inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle CFE \equiv \sphericalangle CDB$. (4)

Cum $AB \,||\, CD$, rezultă că $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle ABD$ (alterne interne). (5)

Dar $m(\widehat{ABD})=\frac{m(\overset{\frown}{AI})}{2}=m(\widehat{ACI})$. (6)

Din (4), (5) şi (6) rezultă că $\sphericalangle ACI \equiv \sphericalangle CFE$, deci dreptele $EF$ şi $AC$ sînt paralele.

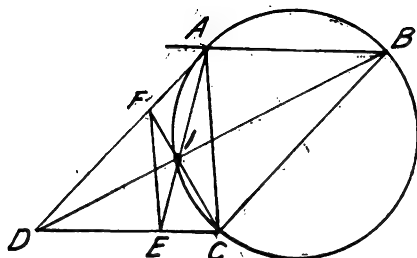



*Fig. VII.G.21.*

**VII.G.22.** Fie $ABCD$ un trapez, $M$ mijlocul bazei mari $BC$, $E$, respectiv $F$ proiecţiile lui $M$ pe dreptele $AB$ şi $CD$ (Vezi fig. VII.G.22.).

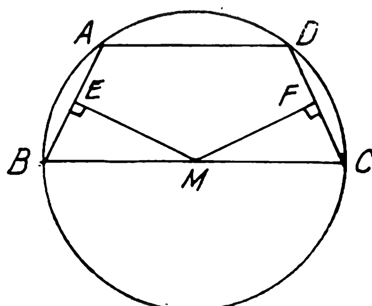



*Fig. VII.G.22.*

Trapezul $ABCD$ este inscriptibil $\Longleftrightarrow$ $ABCD$ este trapez isoscel $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow$ $\sphericalangle EBM \equiv \sphericalangle FCM \Longleftrightarrow \triangle BME \equiv \triangle CMF \Longleftrightarrow EM = MF$.

Raţionamentul este analog dacă $M$ aparţine bazei mici a trapezului.

**VII.G.23.** Triunghiul $ABC$ este isoscel $\Longleftrightarrow$ $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ $\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \widehat{AC} \equiv \widehat{AB}$.

Dar, $m(\widehat{APQ}) = \dfrac{m(\widehat{AC})}{2} + \dfrac{m(\widehat{CQ})}{2}$, $m(\widehat{ANB}) = \dfrac{m(\widehat{AB})}{2} + \dfrac{m(\widehat{CQ})}{2}$.

Deci $AC = AB$ $\Longleftrightarrow$ $\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle ANB$ $\Longleftrightarrow$ patrulaterul $NMPQ$ este inscriptibil $\Longleftrightarrow$ există un punct $O$ egal depărtat de punctele $N$, $M$, $P$, $Q$, $\Longleftrightarrow$ mediatoarele oricăror trei laturi ale patrulaterului $MNPQ$ sînt concurente.

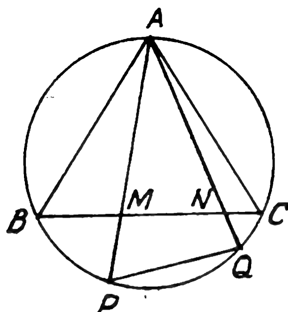


*Fig. VII.G.23.*

**VII.G.24.** Fie $ABC$ un triunghi, $D$, $E$ proiecţiile lui $B$, respectiv $C$ pe dreptele $AC$, $AB$; fie $M$ mijlocul segmentului $ED$. Fie $A'$ punctul de intersecţie a mediatoarei segmentului $ED$ cu $BC$. (Vezi fig. VII.G.24.).

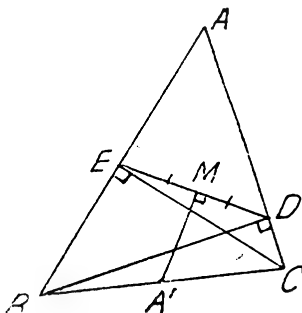


*Fig. VII.G.24.*

Deoarece $m(\widehat{BEC}) = m(\widehat{BDC}) = 90°$, patrulaterul $DEBC$ este inscriptibil, iar mediatoarea coardei $DE$ conţine un diametru al cercului circumscris lui $DEBC$.

Cum $BC$ este alt diametru, rezultă că $A'$ este centrul cercului, deci $A'B = A'C$.

**VII.G.25.** Conform problemei anterioare, $F$ este mijlocul segmentului $BC$ şi $B$, $C$, $D$, $E$ sînt conciclice pe cercul de centru $F$. (Vezi fig. VII.G.25.).

Deci, $m(\widehat{DCE}) = \dfrac{m(\widehat{DE})}{2} = \dfrac{m(\widehat{EFD})}{2}$.

Avem : $m(\widehat{A}) = 60° \Longleftrightarrow m(\widehat{ABD}) = 30° = m(\widehat{DCE}) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow m(\widehat{DFE}) = 2 \cdot 30° = 60° \Longleftrightarrow$ Triunghiul isoscel $DEF$ este echilateral.

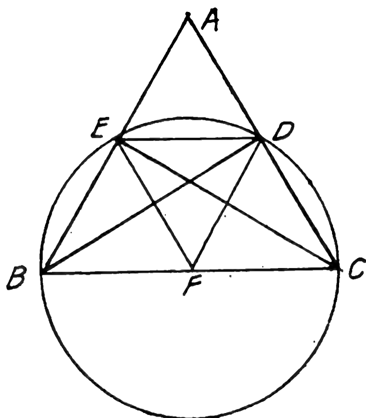



*Fig. VII.G.25.*

**VII.G.26.** (Vezi fig. VII.G.26.). Deoarece patrulaterele *BMHP*, *BMNA* și *PHNA* sînt inscriptibile rezultă că

$$\sphericalangle HPM \equiv \sphericalangle HBM \equiv \sphericalangle NAH \equiv NPH. \text{ Deci}$$

$$\sphericalangle HPN \equiv \sphericalangle HPM, \text{adică } PH \text{ este bisectoare în triunghiul } MNP. \quad (1)$$

Analog, $\sphericalangle HNP \equiv \sphericalangle HAP \equiv \sphericalangle HCM \equiv \sphericalangle HNM$, deci *NH* este bisectoare în triunghiul *MNP*. (2)

Din (1) și (2) rezultă că *H* este centrul cercului înscris în triunghiul *MNP*.

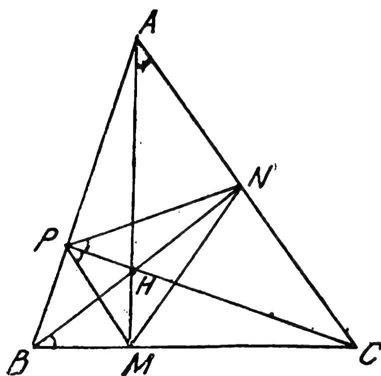



*Fig. VII.G.26.*

**VII.G.27.** CAZUL I. Punctele $C$ şi $D$ sînt situate pe semidreptele $AO$, respectiv $BO$ în exteriorul segmentelor $AO$ şi $BO$.

*METODA 1*

Fie $O_1$, $O_2$ centrele cercurilor de diametri $OA$, respectiv $OB$. Fie $M$ mijlocul segmentului $CD$. Fie $I$ intersecţia dreptei $OB$ cu $AB$.

Deoarece $ABCD$ este înscris în cerc, $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle ABD$. (1)

Apoi, $\sphericalangle MOD \equiv \sphericalangle IOB$ (unghiuri opuse la vîrf). (2)

Deoarece $OM$ este mediană în triunghiul dreptunghic $COD$, rezultă că $\sphericalangle MOD \equiv \sphericalangle MDO$. (3)

Din (1), (2), (3) rezultă că : $m(\widehat{IOB}) + m(\widehat{OBI}) = 90°$.

Deci $I \in C(O_2, O_2B)$. (4)

Analog rezultă că $m(\widehat{IOA}) + m(\widehat{OAI}) = 90°$. Deci $I \in C(O_1, O_1A)$. (5)

Din (4) şi (5) rezultă că $I \in C(O_1, O_1A) \cap C(O_2, O_2B)$. (Vezi fig. VII.G.27.).

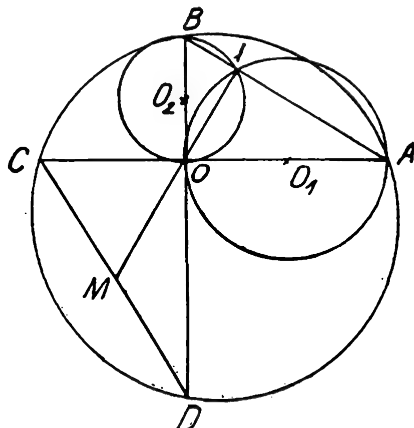



*Fig. VII.G.27.*

*METODA 2*

Fie $OI$ dreapta de intersecţie a cercurilor de centre $O_1$, $O_2$. Arătăm că $OI$ este mediană în triunghiul $COD$. Fie $M$ intersecţia dreptelor $OI$ şi $CD$. Dreapta $AC$ este tangentă în $O$ la $C(O_2, O_2B)$.

Deci : $\sphericalangle IBO \equiv \sphericalangle IOA \equiv \sphericalangle MOC$. (6)

Din (1), (6) rezultă că $\sphericalangle MCO \equiv \sphericalangle MOC$, deci $CM = MO$. (7)

Analog se arată că $\sphericalangle MDO \equiv \sphericalangle MOD$, deci $DM = MO$. (8)

Din (7) şi (8) rezultă că $CM = MD$, deci $OM$ este mediană în triunghiul $COD$.

CAZUL II

Punctele $C$ şi $D$ sînt interioare segmentelor $AO$, respectiv $BO$. Raţionamentul este analog cazului I.

**VII.G.28.** Fie $M \in \widehat{AB}$. Avem $MC > MA$, $MC > MB$. Construim $P$ pe $MC$ astfel încît $PC = MA$. (Vezi fig. VII.G.28.).

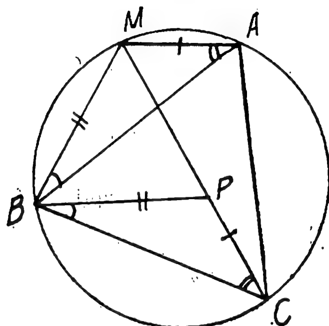



*Fig. VII.G.28.*

Avem $BC = AB$ ; $m(\widehat{MAB}) = m(\widehat{BCM}) = \frac{m(\widehat{BM})}{2}$.

Rezultă că $\triangle BCP \equiv \triangle BAM$ (L.U.L.).

De aici obținem că $BP = BM$ și $m(\widehat{MBP}) = m(\widehat{ABC}) = 60°$.
Rezultă că triunghiul $MBP$ este echilateral.
Deci $MB = MP$.
Dar $MC = MP + PC$.
Deci $MC = MB + MA$.
Analog procedăm dacă $M$ se găsește pe arcul mic $AC$, sau pe arcul mic $BC$.

**VII.G.29.** a) Avem $m(\widehat{AEB}) = 90°$, $m(\widehat{AFB}) = 90°$, deci patrulaterul $ABFE$ este inscriptibil. Rezultă că $\sphericalangle FEB \equiv \sphericalangle FAB$. (1)

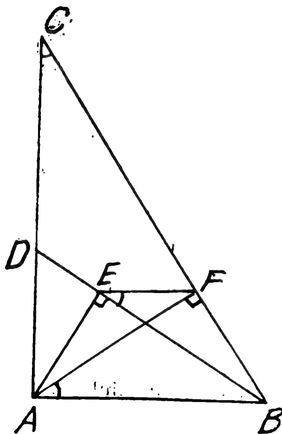



*Fig. VII.G.29.a.*

Dar $\sphericalangle FAB \equiv \sphericalangle FCA$ (avînd acelaşi complement). (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\sphericalangle FEB \equiv \sphericalangle FCD$, deci patrulaterul $CDEF$ este inscriptibil. (Vezi fig. VII.G.29 a.).

b) Deoarece $D$ aparţine segmentului $AC$, rezultă că punctele $A$ şi $F$ sînt separate de către dreapta $BD$. Cum $AE \perp BD$, rezultă că $m(\widehat{AEF}) > 90°$.

În triunghiul obtuzunghic $AEF$ avem $AF > AE$, $AF > EF$. (3)

Dacă triunghiul $AEF$ este isoscel, din (3) rezultă $AE = EF$. De aici $\sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle EFA$. Dar $ABFE$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle FBD$, $\sphericalangle EFA \equiv \sphericalangle DBA$. Rezultă că $\sphericalangle FBD \equiv \sphericalangle DBA$, deci $BD$ este bisectoarea unghiului **$B$ al triunghiului** $ABC$.

c) Notăm $m(\widehat{EFA}) = \alpha$. (Vezi fig. VII.G.29.b.). Deoarece $ABFE$ este trapez isoscel, rezultă că $\sphericalangle EFA \equiv \sphericalangle FAB \equiv \sphericalangle ABE$. **Deoarece $BD$ este** bisectoarea $ABF$ avem şi $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle EBF$. Aplicînd teorema despre suma măsurilor unghiurilor în triunghiul dreptunghic $ABF$, obţinem $3\alpha = 90°$, deci $\alpha = \frac{90°}{3} = 30°$. Rezultă că $m(\widehat{ABC}) = 2 \cdot 30° = 60°$, deci $m(\widehat{ACB}) = 30°$.

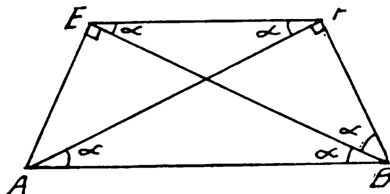



*Fig. VII.G.29.b.*

**VII.G.30.** a) Deoarece $m(\widehat{MQT}) = m(\widehat{MST}) = 90°$, patrulaterul $TQMS$ este inscriptibil. Rezultă că

$$\sphericalangle TQS \equiv \sphericalangle TMS, \quad \sphericalangle QMT \equiv \sphericalangle QST. \quad (1)$$

Dar $MT$ este bisectoarea unghiului $QMS$, deci $\sphericalangle QMT \equiv \sphericalangle TMS$ (2).

Din (1) şi (2) rezultă că $\sphericalangle TQS \equiv \sphericalangle QST$, deci triunghiul $TQS$ este isoscel. (3)

*Observaţie.* (Obţinem acelaşi lucru observînd că $T$, fiind situat pe bisectoarea unghiului $BMC$, este egal depărtat de laturile $MB$, $MC$. Deci $TQ = TS$.)

Pe de altă parte, $m(\widehat{BMC}) = 120°$. Rezultă că $m(\widehat{TQS}) = m(\widehat{SMT}) = \frac{120°}{2} = 60°$. (4)

Din (3) şi (4) rezultă că triunghiul $TQS$ este echilateral.

b) METODA 1

Bisectoarea unghiului $BMC$ trece printr-un punct situat la mijlocul arcului mare $BC$. Deoarece $\widehat{AB} \equiv \widehat{AC}$, punctul $A$ aparține acestei bisectoare, deci punctele $M$, $T$, $A$, sînt coliniare.

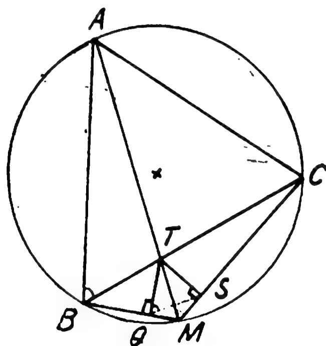



*Fig. VII.G.30.*

METODA 2

Avem $m(\widehat{TMC}) = \dfrac{120°}{2} = 60° = m(\widehat{ABC})$. (5)

Dar $ABMC$ fiind inscriptibil, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AMC})$. (6)

Din (5) și (6) rezultă că $\sphericalangle TMC \equiv \sphericalangle$ AMC, deci $T$ aparține dreptei $AM$, deci punctele $M$, $T$, $A$, sînt coliniare.

**VII.G.31.** a) Fie $O$ și $O'$ centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $ABD$ și respectiv $ACD$. (Vezi fig. VII.G.31.). Avem : $m(\widehat{DAB}) = \dfrac{m(\widehat{BD})}{2} =$

$= m(\widehat{DBM})$ ; $m(\widehat{DAC}) = \dfrac{m(\widehat{CD})}{2} = m(\widehat{DCM})$.

Dar, în triunghiul $BMC$, $m(\widehat{DBM}) + m(\widehat{DCM}) + m(\widehat{BMC}) = 180°$.

Deci $m(\widehat{DAB}) + m(\widehat{DAC}) + m(\widehat{BMC}) = 180°$, adică $m(\widehat{BAC}) +$ $+ m(\widehat{BMC}) = 180°$, deci patrulaterul $ABMC$ este inscriptibil.

b) Dacă punctele $A$, $D$, $M$ sînt coliniare, atunci $ADM$ este diagonală a patrulaterului inscriptibil $ABMC$. Rezultă că

$$\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle DBM. \quad (1)$$

Dar

$$\sphericalangle DBM \equiv \sphericalangle BAD. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, deci $AD$ este bisectoarea unghiului $BAC$.

Reciproc, dacă $AD$ este bisectoare, atunci $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAD}$. (3)

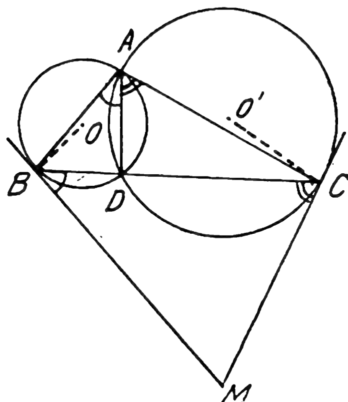



*Fig. VII.G.31.*

Dar $ABMC$ fiind inscriptibil, avem

$$\sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle CBM, \quad \sphericalangle CBM \equiv \sphericalangle BAD. \qquad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CAM}$, deci punctele $A$, $D$, $M$ sînt coliniare.

**VII.G.32.** METODA 1. a) Deoarece $O_1D \perp DE$, $O_2E \perp DE$, rezultă că $O_1D \parallel O_2E$. Rezultă că $\sphericalangle BO_1D$ și $\sphericalangle CO_2E$ sînt suplementare, fiind unghiuri externe de aceeași parte a secantei. Cum $\sphericalangle BO_1D$ și $\sphericalangle EO_2C$ sînt unghiuri la centru, avem $m(\widehat{BD}) + m(\widehat{EC}) = 180°$. (1)

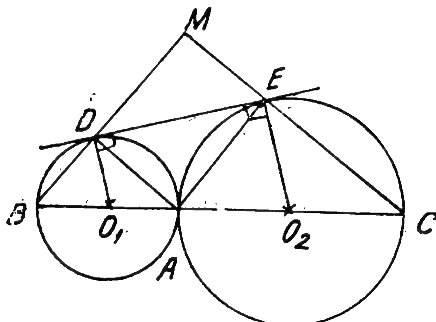



*Fig. VII.G.32.*

Dar $m(\widehat{BAD}) = \frac{m(\widehat{BD})}{2}$, $m(\widehat{EAC}) = \frac{m(\widehat{EC})}{2}$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{EAC}) = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$.

Deci $m(\widehat{DAE}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Rezultă că triunghiul $DAE$ este dreptunghic (în $A$).

b) Dreptele $O_1D$ şi $O_2E$ sînt paralele, fiind perpendiculare pe aceeaşi dreaptă, deci $\sphericalangle DO_1A$ şi $\sphericalangle EO_2A$ sînt suplementare, fiind unghiuri interne de aceiaşi parte a secantei. Rezultă că $m(\widehat{AD}) + m(\widehat{AE}) = 180^\circ$. Unghiurile $DBA$ şi $ECA$ sînt unghiuri înscrise în cerc. Deci $m(\widehat{DBA}) + m(\widehat{ECA}) = \frac{m(\widehat{AD})}{2} + \frac{m(\widehat{EA})}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$. Rezultă că unghiurile $DBA$ şi $ECA$ sînt complementare, deci $m(\widehat{BMC}) = 90^\circ$. Deci triunghiul $MDE$ este dreptunghic (în $M$).

METODA 2

Deoarece $O_1D \parallel O_2E$ rezultă că $\sphericalangle BO_1D \equiv \sphericalangle AO_2E$, fiind unghiuri corespondente. Deci $m(\widehat{BD}) = m(\widehat{AE})$. Deci $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACE$. Dar $\sphericalangle BAD$ şi $\sphericalangle ACE$ au poziţie de unghiuri corespondente. Rezultă că $AD \parallel EC$. (3)

Pe de altă parte, unghiurile $BDA$ şi $AEC$ sînt înscrise în semicercuri. Deci $m(\widehat{BDA}) = 90^\circ$, $m(\widehat{AEC}) = 90^\circ$. (4)

Din (3) şi (4) rezultă că patrulaterul $AEMD$ este dreptunghi. Deci triunghiurile $DAE$ şi $MDE$ sînt dreptunghice în $A$, respectiv $M$.

**VII.G.33.** Vom arăta că unghiurile $MAB$ şi $MNB$ sînt suplementare. Fie $P$ punctul de tangenţă al celor două cercuri. (Vezi fig. VII.G.33.). Avem

$$\sphericalangle MNP \equiv \sphericalangle NBP \equiv \sphericalangle BNO_2. \quad (1)$$

De asemenea,

$$\sphericalangle NMP \equiv \sphericalangle MAP. \quad (2)$$

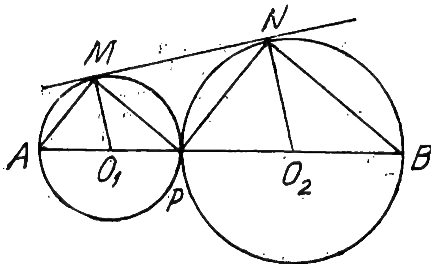



*Fig. VII.G.33.*

Dar conform problemei 32, $m(\widehat{NPM}) = 90°$, deci unghiurile $MNP$ și $NMP$ sînt complementare. Din (1) și (2) va rezulta că și unghiurile $MAB$ și $BNO_2$ sînt complementare. Deci $m(\widehat{MAB}) + m(\widehat{MNB}) = 90° + 90° = 180°$.

Rezultă că patrulaterul $AMNB$ este inscriptibil.

**VII.G.34.** Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$, $A'$ piciorul medianei $AG$, $M$ intersecția dreptelor $AA'$ și $B''C''$ (Vezi fig. VII.G.34.).

Patrulaterul $BCB''C''$ este inscriptibil, deci

$$\sphericalangle BCC'' \equiv \sphericalangle BB''C'' \qquad (1)$$

În triunghiul dreptunghic $BGC$, $GA'$ este mediană. Rezultă că

$$\sphericalangle GBA' \equiv \sphericalangle A'GB. \qquad (2)$$

Dar $\sphericalangle BGA' \equiv \sphericalangle AGB''$, fiind unghiuri opuse la vîrf. (3)

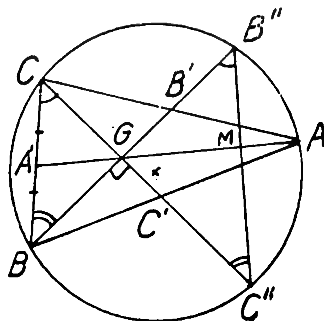



*Fig. VII.G.34.*

Cum $\widehat{GBA'}$ și $\widehat{A'CG}$ sînt complementare, din (1), (2) și (3) rezultă că unghiurile $MGB''$ și $MB''G$ sînt complementare, deci $m(\widehat{B''MG}) = 90°$. Adică $B''C'' \perp AA'$.

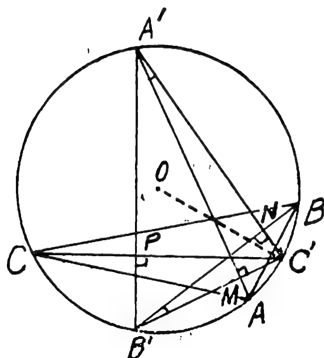
**VII.G.35.** Considerăm problema rezolvată. Fie triunghiul $A'B'C'$ înscris în cercul de centru $O$ ; $M$, $N$, $P$ proiecțiile punctelor $A'$, $B'$, $C'$ respectiv pe dreptele $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ ; $A$, $B$, $C$ intersecțiile dreptelor $A'M$, $B'N$, $C'P$ cu cercul. (Vezi fig. VII.G.35.). Deoarece patrulaterul $A'NMB'$ este inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle NA'M \equiv \sphericalangle NB'M$, deci $\sphericalangle C'A'A \equiv \sphericalangle C'B'B$. Cum ambele sînt unghiuri înscrise în același cerc, arcele subîntinse sînt congruente. Deci $\widehat{AC'} \equiv \widehat{BC'}$. Deci vîrful $C'$ al triunghiului se găsește la mijlocul arcului $\widehat{AB}$.

Analog, $B'$ se găsește la mijlocul lui $\widehat{AC}$, $A'$ la mijlocul lui $\widehat{BC}$.

Efectuarea construcției.

Fie cercul de centru $O$ şi $A$, $B$, $C$ cele trei puncte date pe cerc. Construim din $O$, perpendiculara pe segmentul $AB$. Ea intersectează $\overset{\frown}{AB}$ în mijloc. Notăm acest mijloc $C'$

Analog, construim $B'$, $A'$, mijloacele arcelor $AC$, respectiv $BC$. Triunghiul $A'B'C'$ este cel căutat.




**VII.G.36.** Fie $P$ intersecţia dreptelor $AB$ şi $CD$.

CAZUL I

*P interior cercului.* (Vezi fig. VII.G.36.a.)

a) În triunghiurile $BDM$ şi $CAM$, avem : $BM = CM$ (ca tagente duse din acelaşi punct la cerc). (1)

Deoarece : $AB = CD$, rezultă că $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$, deci $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BD}$. Rezultă că : $BD = AC$, (2)

şi că $\sphericalangle MBD \equiv \sphericalangle MCA$ (avînd suplemente congruente). (3)

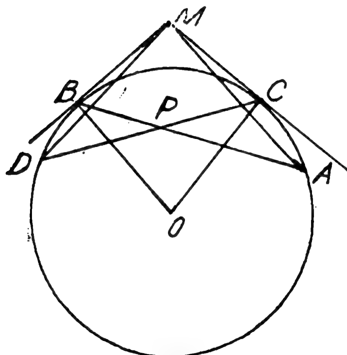



*Fig. VII.G.36.a.*

Din (1), (2), (3) rezultă, conform cazului L.U.L. că: $\triangle BDM \equiv \triangle CAM$. Deci $MD = MA$.

b) În triunghiul isoscel $MBC$, avem: $m(\widehat{MBC}) = \frac{180° - m(\widehat{BMC})}{2} =$

$$= \frac{180° - 100°}{2} = 40°. \text{ Deci } m(\widehat{BC}) = 80°.$$

Avem $m(\widehat{BPD}) = 30°$, $m(\widehat{BPC}) = 150°$, pentru că $m(\widehat{BPC}) > 80°$.

Atunci $m(\widehat{BPC}) = \frac{m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AD})}{2}$ Deci $m(\widehat{AD}) = 220°$. Avem și

$$m(\widehat{BD}) = m(\widehat{AC}) = \frac{360° - m(\widehat{AD}) - m(\widehat{BC})}{2} = 30°.$$

Deci $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AC}) + m(\widehat{BC}) = 30° + 80° = 110°$.

CAZUL II:

*P exterior cercului.* (Vezi fig. VII.G.36.b.)

a) Se demonstrează analog că $\triangle ABM \equiv \triangle DCM$ (L.U.L.). De aici rezultă că $AM = MD$.

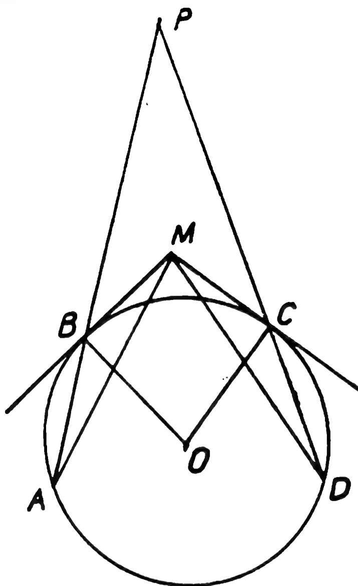



*Fig. VII.G.36.b.*

b) În triunghiul $MBC$ avem $m(\widehat{MBC}) = 40°$, deci $m(\widehat{BC}) = 80°$.

Dar $m(\widehat{BPC}) = 30°$, iar $m(\widehat{BPC}) = \dfrac{m(\widehat{AD}) - m(\widehat{BC})}{2}$.

Rezultă că : $m(\widehat{AD}) = 2m(\widehat{BPC}) + m(\widehat{BC}) = 60° + 80° = 140°$. Deci

$$m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) = \frac{360° - (m(\widehat{BC}) + m(\widehat{AD}))}{2} = \frac{360° - (80° + 140°)}{2} = 70°.$$

**VII.G.37.** Putem avea mai multe situații, după cum $D$ este pe $\widehat{AB}$ sau pe $\widehat{BC}$, sau pe $\widehat{AC}$. Raționamentul este similar în toate aceste situații. Fie $D \in \widehat{AB}$, $E \in \widehat{AC}$. (Vezi fig. VII.G.37.a.).

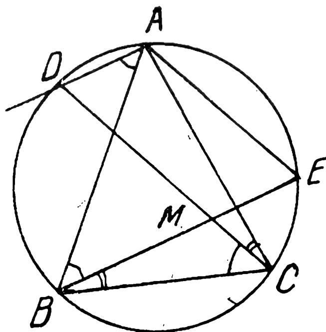



*Fig. VII.G.37.a.*

METODA 1

Deoarece $AD \parallel BE$, rezultă $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle ABE$ (alterne interne) (1)

Dar $m(\widehat{BCD}) = \dfrac{m(\widehat{BD})}{2} = m(\widehat{DAB})$. (2)

Din (1), (2) rezultă : $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle BCD$. (3)

Dar $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (triunghiul $ABC$ este isoscel). (4)

Din (3) și (4) rezultă că : $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle DCA$, deci $\widehat{CE} \equiv \widehat{AD}$.

Deoarece secantele $AE$ și $CD$ determină pe cerc arce congruente rezultă că ele sînt paralele.

METODA 2

Fie următoarea lemă :

Dacă într-un patrulater două unghiuri opuse sînt congruente și două laturi opuse sînt paralele, atunci acel patrulater este paralelogram. (Demonstrația se bazează pe faptul că două drepte paralele determină cu o secantă unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.)

Fie $M$ intersecţia dreptelor $BE$ şi $CD$. Deoarece $ADBC$ este patrulater înscris în cerc, rezultă :

$$\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle ABC. \tag{5}$$

Deoarece $ABCE$ este patrulater înscris în cerc, rezultă

$$\sphericalangle AEB \equiv \sphericalangle ACB. \tag{6}$$

Dar triunghiul $ABC$ este isoscel, deci

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB. \tag{7}$$

Din (5), (6) şi (7) rezultă

$$\sphericalangle ADC \equiv \sphericalangle AEB. \tag{8}$$

Dar $AD \parallel BE$. (9)

Din (8) şi (9), aplicînd lema, rezultă că $ADME$ este paralelogram, deci $AE \parallel CD$.

METODA 3

Fie $D \in \widehat{AC}$, $E \in \widehat{BC}$. (Vezi fig. VII.G.37.b.)

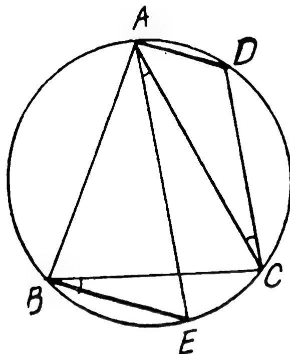



*Fig. VII.G.37.b.*

Deoarece $BE \parallel AD$, rezultă :

$\widehat{AB} \equiv \widehat{DCE}$. (10

Deoarece $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, rezultă

$\widehat{AB} \equiv \widehat{ADC}$. (11

Din (10) şi (11) obţinem $\widehat{DCE} \equiv \widehat{ADC}$ ; rezultă că $\widehat{AD} \equiv \widehat{CE}$

Deci $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle ACD$. Rezultă că : $AE \parallel CD$.

METODA 4 (Vezi fig. VII.G.37.c.)

Deoarece patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, rezultă

$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB$. (1?

Dar $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (triunghiul $ABC$ este isoscel). (13)

Avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DBE$ (alterne interne). (14)

Din (12), (13) și (14) rezultă că $\sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle ABC$. Deci $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBE$ (diferențe de unghiuri congruente). Rezultă că $\widehat{AD} \equiv \widehat{EC}$.

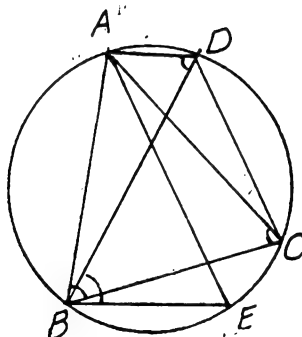



*Fig. VII.G.37.c.*

**VII.G.38.** Fie $M$ între $A$ și mijlocul segmentului $AB$. (Vezi fig. VII.G.38.)

a) Din ipoteză rezultă că $m(\widehat{OMD}) = m(\widehat{OAD}) = 90°$. Deci punctele $O$, $M$, $A$, $D$ sînt conciclice. Rezultă că : $\sphericalangle OAM \equiv \sphericalangle ODM$. (1)

b) Deoarece $m(\widehat{OME}) = m(\widehat{OBE}) = 90°$, punctele $O$, $B$, $E$, $M$ sînt conciclice. Rezultă că : $\sphericalangle OEM \equiv \sphericalangle OBM$. (2)

Dar triunghiul $OAB$ este isoscel, deci $\sphericalangle OBM \equiv \sphericalangle OAM$. (3)

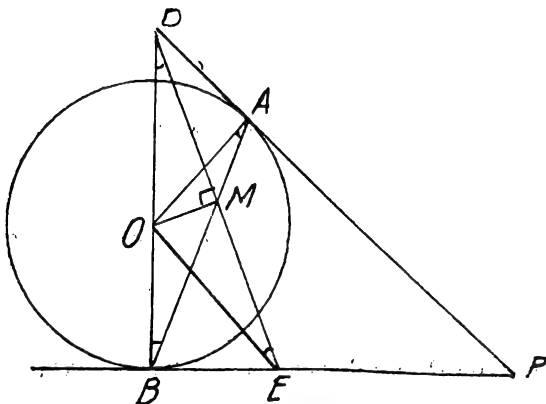



*Fig. VII.G.38.*

Din (1), (2) şi (3) rezultă că $\sphericalangle OEM \equiv \sphericalangle ODM$, deci triunghiul $OED$ este isoscel. Rezultă că înălţimea $OM$ este şi mediană, deci $MD = ME$.

Demonstraţia este aceeaşi dacă $M$ este între $B$ şi mijlocul segmentului $AB$, figura obţinută fiind simetrică faţă de dreapta $OP$.

**VII.G.39.** Punctele $E$ şi $F$ pot fi ambele interioare segmentului $BC$, sau numai unul din ele, sau nici unul. Deci problema admite mai multe soluţii. (Vezi fig. VII.G.39.a, b, c.) Remarcăm însă că soluţii diferite obţinem în următoarele două situaţii, (celelalte rezolvîndu-se analog cu acestea)

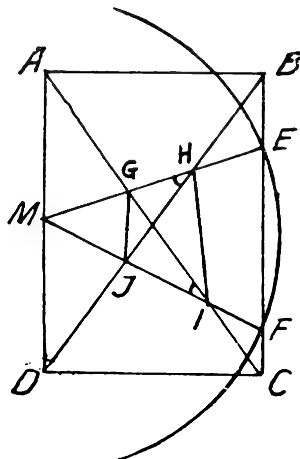



*Fig. VII.G.39.a.*

I. Centrul dreptunghiului $ABCD$ este interior triunghiului $MEF$. *(Fig. VII.G.39.a, b.)*

II. Centrul dreptunghiului $ABCD$ este în exteriorul triunghiului $MEF$ (Fig. VII.G.39.c.).

CAZUL I :

În acest caz diagonalele dreptunghiului sînt diagonale ale patrulaterului $GHIJ$. Vom arăta că : $\sphericalangle GHJ \equiv \sphericalangle GIJ$.

Deoarece triunghiul $MEF$ este isoscel, $\sphericalangle MEF \equiv \sphericalangle MFE$. Rezultă :

$\sphericalangle BEM \equiv \sphericalangle CFM$. (1)

Deoarece $ABCD$ este dreptunghi, $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle BCA$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\sphericalangle CIF \equiv \sphericalangle BHE$, deci $\sphericalangle GHJ \equiv \sphericalangle GIJ$, deci punctele $G$, $H$, $I$, $J$ sînt conciclice.

CAZUL II

În acest caz, diagonalele dreptunghiului nu sînt diagonale ale patrulaterului cu vîrfurile $G$, $H$, $I$, $J$. Vom arăta că $\sphericalangle GIJ \equiv \sphericalangle MHJ$.

Avem, în triunghiul isoscel $MEF$, $\sphericalangle MFE \equiv \sphericalangle MEF$, deci și suplementele lor $CFI$ și $BEG$ sînt congruente. Apoi, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle DBC$. Deci, în triunghiurile $HBE$ și $ICF$, avem $\sphericalangle HEB \equiv \sphericalangle CFI$ și $\sphericalangle HBE \equiv \sphericalangle FCI$.

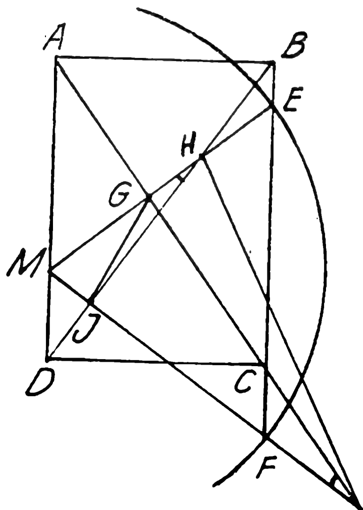



*Fig. VII.G.39.b.*

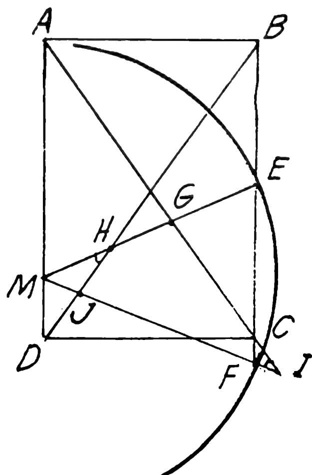



*Fig. VII.G.39.c.*

Rezultă că $\sphericalangle BHE \equiv \sphericalangle CIF$. Dar $\sphericalangle MHJ$ este opus la vîrf cu $\sphericalangle BHE$. Rezultă că : $\sphericalangle MHJ \equiv \sphericalangle CIF \equiv \sphericalangle GIJ$, deci punctele $G$, $H$, $J$, $I$ sînt conciclice.

**VII.G.40.** Figurile VII.G.40.a și b ne sugerează că sînt posibile mai multe situații ; de exemplu, $A$ poate aparține arcului mic $BC$ sau arcului mare $BC$. O privire mai atentă asupra problemei ne permite să discernem că numai poziția punctului $E$ de intersecție a dreptelor $AC$ și $OD$ poate modifica natura soluției problemei.

CAZUL I :

Fie $AC > AB$. În acest caz dreapta $OD$ intersectează segmentul $AC$.

a) Deoarece $AD$ este bisectoarea unghiului $BAC$, rezultă că $m(\overset{\frown}{BC}) = 2 \cdot m(\overset{\frown}{BD})$.

Avem : $m(\widehat{BOD}) = m(\overset{\frown}{BD})$, $m(\widehat{BAC}) = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} = m(\overset{\frown}{BD})$.

Deci $\sphericalangle BOD \equiv \sphericalangle BAC$. Rezultă că patrulaterul $AEOB$ este inscriptibil, adică $A$, $B$, $O$, $E$ sînt conciclice.

b) METODA 1

Se arată ușor că dreapta $OD$ este mediatoarea segmentului $BC$. Cum $E$ aparține dreptei $OD$, rezultă că $EC = EB$.

Deci, triunghiul $EBC$ este isoscel, deci $ED$ este bisectoarea unghiului $BEC$. (1)

Unghiurile $BEC$ și $AEG$ sînt opuse la vîrf. (2)

$F$ este pe dreapta $ED$. (3)

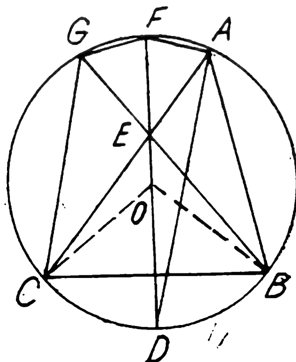



*Fig. VII.G.40.a.*

Din (1), (2) și (3) rezultă că dreapta $EF$ este bisectoarea $\sphericalangle AEG$. Obținem $\overset{\frown}{FG} \equiv \overset{\frown}{FA}$, deci $FG = FA$, deci triunghiul $AFG$ este isoscel.

METODA 2 :

Deoarece punctele $A$, $B$, $O$, $E$ sînt conciclice, $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle EOA$. Dar $E$ aparține dreptelor $OF$ și $BG$, deci $\sphericalangle FOA \equiv \sphericalangle ABG$. Rezultă că : $m(\overset{\frown}{AF}) = \frac{1}{2}\, m(\overset{\frown}{AG})$. De aici rezultă că $AF = FG$.

c) METODA 1

Avem $m(\overset{\frown}{DCF}) = m(\overset{\frown}{DBF}) = 180°$. Știm că $\overset{\frown}{AF} \equiv \overset{\frown}{GF}$, $\overset{\frown}{CD} \equiv \overset{\frown}{BD}$. Rezultă că $\overset{\frown}{CG} \equiv \overset{\frown}{AB}$. Deci $AG \parallel BC$, adică $AGCB$ este trapez. Fiind inscriptibil, trapezul este isoscel.

METODA 2 :

$\triangle CEG \equiv \triangle BEA$ (conform cazului U.L.U.). Rezultă că $CG = AB$, deci $\overset{\frown}{CG} \equiv \overset{\frown}{AB}$. De aici obținem că $GA \parallel CB$.

METODA 3

Avem $m(\widehat{FGD}) = m(\widehat{FAD}) = 90°$, $FD = DF$, $FG = FA$. Rezultă că : $\triangle FGD \equiv \triangle FAD$ (I.C.). De aici obținem că $\sphericalangle GFD \equiv \sphericalangle AFD$, deci $FD$ este bisectoare în triunghiul isoscel $AFG$. Rezultă că $AG \perp FD$. Dar $FD \perp BC$. În concluzie, $AG \parallel BC$.

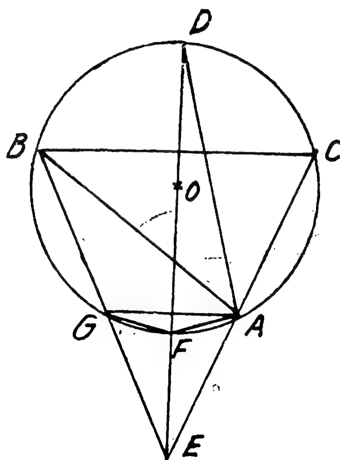


*Fig. VII.G.40.b.*

CAZUL II :

Fie $AC < AB$. În acest caz, dreapta $OD$ nu intersectează segmentul $AC$. Se obține ușor că c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ c) ; de aceea vom demonstra numai c)

Conform ipotezei, dreapta $OD$ este mediatoarea segmentului $BC$. Deci : $BE = EC$ și $\sphericalangle EBC \equiv \sphericalangle ECB$. Rezultă că $\overset{\frown}{BGA} \equiv \overset{\frown}{GAC}$, deci $\overset{\frown}{BG} + \overset{\frown}{GA} = \overset{\frown}{GA} + \overset{\frown}{AC}$, de unde obținem $\overset{\frown}{BG} \equiv \overset{\frown}{AC}$. În consecință $AG \parallel BC$, deci $AGCB$ este trapez isoscel.

CAZUL III

Dacă $AB = AC$ triunghiul $ABC$ este isoscel și punctele $E$, $A$, $F$, $G$ coincid. Concluziile a), b), c) se verifică și în acest caz.

**VII.G.41.** Triunghiul $A_1OA_2$ este isoscel, deci $\sphericalangle OA_1A_2 \equiv \sphericalangle OA_2A_1$.

Dar $\sphericalangle BA_1B_1 \equiv \sphericalangle OA_1A_2$ și $\sphericalangle CA_2C_2 \equiv \sphericalangle OA_2A_1$, fiind unghiuri opuse la vîrf.

Rezultă că

$$\sphericalangle BA_1B_1 \equiv \sphericalangle CA_2C_2. \quad (1)$$

Triunghiul $ABC$ este isoscel, deci : $\sphericalangle B_1BA_1 \equiv \sphericalangle C_2CA_2$.

Din (1) şi (2) rezultă că $\sphericalangle C_1B_1B_2 \equiv \sphericalangle B_2C_2C_1$. Deci punctele $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ sînt conciclice.

b) Dacă $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ sînt vîrfurile unui trapez isoscel, rezultă că $OB_1 = OC_2$ şi $OB_2 = OC_1$. Deci, $B_1C_1 = B_2C_2$.

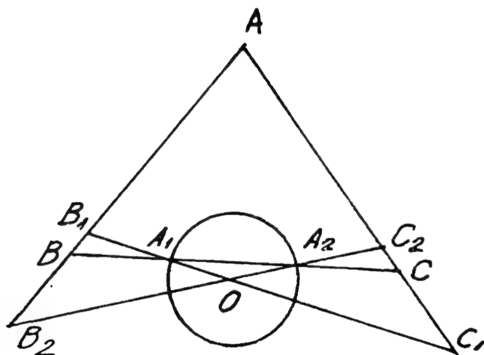



*Fig. VII.G.41.a*

Folosind a), obţinem că $\triangle AB_1C_1 \equiv \triangle AC_2B_2$ (U.L.U.). Rezultă că $\triangle AB_2O \equiv \triangle AC_1O$ (L.L.L.), deci $\sphericalangle B_2AO \equiv \sphericalangle C_1AO$, adică $O$ aparţine bisectoarei unghiului $BAC$.

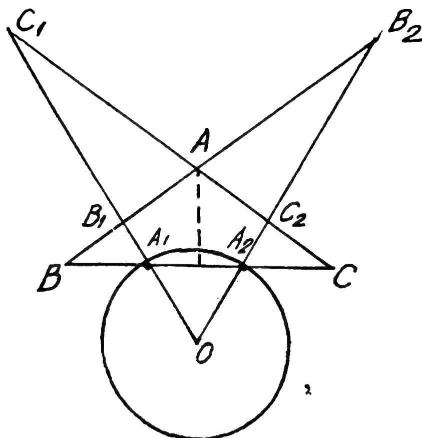



*Fig. VII.G.41.b*

*Observație :* Există mai multe figuri ce corespund ipotezei problemei, generate de următoarele situații : unghiul $A$ al triunghiului $ABC$ este ascuțit sau obtuz ; centrul cercului este interior sau exterior triunghiului $ABC$. (Vezi fig. VII.G.41. a, b, c.) Demonstrația se face analog.

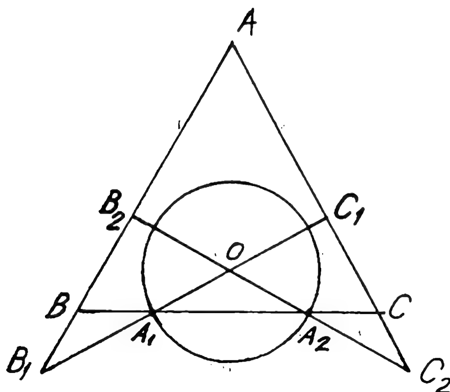



*Fig. VII.G.41.c*

**VII.G.42.** Notăm $m(\widehat{BAC}) = 3\alpha$, $m(\widehat{ABC}) = 3\beta$. (Vezi fig. VII.G.42.)

a) Raționăm prin reducere la absurd.

Presupunem că $PQRT$ este inscriptibil. Deoarece $\sphericalangle APQ$ este unghi exterior triunghiului $APB$, rezultă că $m(\widehat{APQ}) = \alpha + \beta$. În triunghiul $ARB$ $m(\widehat{ARB}) = 180° - 2(\alpha + \beta)$. Dar $PQRT$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle APQ \equiv \sphericalangle ARB$. Rezultă că : $\alpha + \beta = 180° - 2(\alpha + \beta)$. Adică $3(\alpha + \beta) = 180°$,

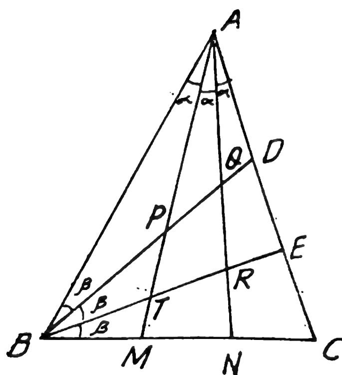



*Fig. VII.G.42.*

deci $m(\widehat{BAC})+m(\widehat{ABC})=180°$, ceea ce este în contradicție cu faptul că $ABC$ este triunghi. Deci presupunerea făcută este falsă. Rezultă că $PQRT$ nu poate fi înscris în cerc.

b) Deoarece $MNRT$ este inscriptibil, $\sphericalangle ATR \equiv \sphericalangle ANM$. Dar $m(\widehat{ATR})=\alpha+2\beta$ ; $m(\widehat{ANB})=180°-(2\alpha+3\beta)$. Deci $2\beta=180°-3\alpha-3\beta=180°-3(\alpha+\beta)=m(\widehat{ACB})$. Adică $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle DCB$, deci triunghiul $BDC$ este isoscel, avînd $BD=DC$. Se arată analog că triunghiul $AMC$ este isoscel, avînd $AM=MC$.

c) Conform ipotezei c) și conform b) avem $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle ACB$. Rezultă că : $\sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle MAC$, deci $\alpha=\beta$, deci $3\alpha=3\beta$. Adică $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle ABC$, deci triunghiul $ABC$ este isoscel, avînd $AC=BC$.

d) Dacă $RNCE$ este inscriptibil, rezultă că unghiurile $ECN$ și $ARB$ sînt suplementare, $m(\widehat{ACB})+m(\widehat{ARB})=180°$. (1)

Dar $m(\widehat{ARB})=180°-2(\alpha+\beta)$ ;

$m(\widehat{ACB})=180°-3(\alpha+\beta)$. (2)

Însumînd relațiile (2) și înlocuind în (1), obținem

$$360°-5(\alpha+\beta)=180°.$$

Adică $5(\alpha+\beta)=180°$, deci $\alpha+\beta=36°$.

$m(\widehat{ACB})=180°-3\cdot 36°=72°$.

**VII.G.43.** a) Avem : $m(\widehat{MBM'})=90°$. (Vezi fig. VII.G.43.) Din ipoteză rezultă că triunghiurile $MBN$ și $M'BP$ sînt isoscele. Notăm : $m(\widehat{BMN})=m(\widehat{BNM})=\alpha$, $m(\widehat{BM'P})=m(\widehat{BPM'})=\beta$. Conform teoremei despre suma unghiurilor în cele două triunghiuri, avem : $2\alpha=180°-m(\widehat{MBN})$ ; $2\beta=180°-m(\widehat{M'BP})$. Adunînd cele două relații obținem : $2(\alpha+\beta)=360°-(m(\widehat{MBN})+m(\widehat{M'BP}))$. Dar, $m(\widehat{MBN})+m(\widehat{M'BP})=360°-90°=270°$. Deci : $2(\alpha+\beta)=360°-270°=90°$ ; rezultă că $\alpha+\beta=\frac{90°}{2}=45°$. Deci : $m(\widehat{ANM})+m(\widehat{APM'})=45°=$ ct.

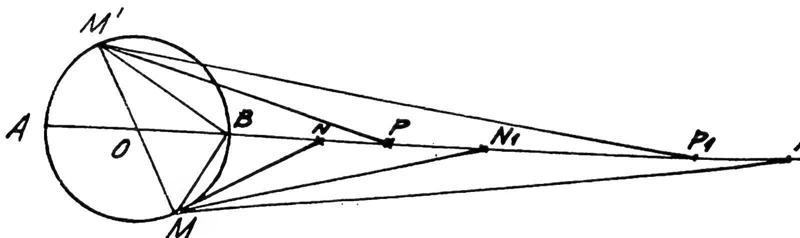



*Fig. VII.G.43.*

b) Din modul de construcţie a punctelor $N_1$, $P_1$ rezultă că triunghiurile $MNN_1$ şi $M'PP_1$ sînt isoscele. Unghiurile de măsuri $\alpha$, respectiv $\beta$, sînt unghiuri exterioare în triunghiurile $MNN_1$, respectiv $M'PP_1$.

Rezultă : $\alpha = 2 \cdot m(\widehat{NMN_1})$ ; $\beta = 2 \cdot m(\widehat{PM'P_1})$.

Deci $m(\widehat{NMN_1}) + m(\widehat{PM'P_1}) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{45^\circ}{2}$.

Printr-un raţionament similar obţinem

$$m(\widehat{N_1MN_2}) + m(\widehat{P_1M'P_2}) = \frac{\alpha+\beta}{2^2} = \frac{45^\circ}{4}.$$

Observăm că, la fiecare pas, suma se înjumătăţeşte. Deci, după primul pas avem $\frac{45^\circ}{2}$, după al doilea $\frac{45^\circ}{4}$, după al treilea $\frac{45^\circ}{8}$, după al patrulea $\frac{45^\circ}{16}$, după al cincilea $\frac{45^\circ}{32}$, după al şaselea $\frac{45^\circ}{64}$. Deci după al şaselea pas, suma devine mai mică de 1°.

**VII.G.44.** a) Deoarece $AB = CD$, rezultă că $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$ (Vezi fig. VII.G.44.).

Deci $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$. Rezultă că $AD = BC$. (1)

Dar, $\sphericalangle MAD \equiv \sphericalangle MCB$ ; $\sphericalangle MDA \equiv \sphericalangle MBC$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\triangle AMD \equiv \triangle CMB$ (U.L.U.). Rezultă că $AM = MC$, $DM = MB$.

b) Deoarece $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$, rezultă că dreptele $AC$ şi $BD$ sînt paralele. (3)

Deoarece $O_1$ este mijlocul segmentului $BD$, $OO_1 \perp BD$. (4)

Deoarece $O_2$ este mijlocul segmentului $AC$, $OO_2 \perp AC$. (5)

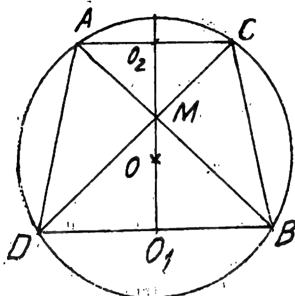



*Fig. VII.G.44.*

Din (3), (4) şi (5) conform teoremei de unicitate a perpendicularei duse dintr-un punct pe o dreaptă, rezultă că punctele $O$, $O_1$, $O_2$ sînt coliniare. (6)

Deoarece triunghiul $AMC$ este isoscel, $M$ aparține mediatoarei segmentului $AC$, deci $M$ aparține dreptei $O_1O_2$. (7)

Din (6) și (7) rezultă că $O_1$, $O$, $M$, $O_2$ sînt coliniare.

**VII.G.45.** Orice patrulater convex $ABCD$ care îndeplinește condiția $AB + CD = BC + AD$ este circumscriptibil unui cerc. Fie $O$ centrul cercului înscris în patrulaterul $ABCD$ și $M$, $N$, $P$, $Q$ punctele de tangență ale laturilor $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ cu cercul. (Vezi fig. VII.G.45.).

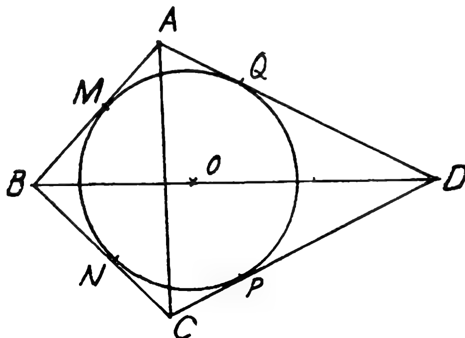



*Fig. VII.G.45.*

Avem $BM = BN$ (dreptele $BM$, $BN$ fiind tangente duse din același punct la cerc). (1)

Apoi, $\triangle AMQ \equiv \triangle CNP$ (sînt triunghiuri isoscele avînd $\widehat{A} \equiv \widehat{C}$ și $MQ = NP$ ($\overset{\frown}{MQ} \equiv \overset{\frown}{NP}$)). Rezultă că : $AM = NC$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $AB = BC$, deci triunghiul $ABC$ este isoscel. (3)

Analog, $QD = PD$ și $AQ = CP$, deci triunghiul $ADC$ este isoscel. (4)

Semidreapta $BO$ este bisectoarea unghiului $ABC$, deci din (3) rezultă că $BO \perp AC$. (5)

Analog, din (4) rezultă că $OD \perp AC$. (6)

Din (5) și (6), conform teoremei de unicitate a perpendicularei duse dintr-un punct pe o dreaptă, rezultă că punctele $B$, $O$, $D$ sînt coliniare. Deci dreapta $BD$ este mediatoarea segmentului $AC$. Deci, oricare ar fi $X \in AB \cup AD$, există $Y \in BC \cup CD$ astfel încît $d(X, BD) = d(Y, BD)$, adică dreapta $BD$ este axă de simetrie a patrulaterului $ABCD$.

**VII.G.46.** Conform notațiilor din fig. VII.G.46., avem :

$$4x + 4y = 120$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{3}$$

Rezultă $x+y=30$. Folosind proporţii derivate, obţinem $\frac{x+y}{x}=\frac{4}{3}$ deci $x=\frac{90}{4}=\frac{45}{2}$ şi $\frac{y}{x+y}=\frac{1}{4}$ deci $y=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$. Rezultă $AB=45$ cm, $CD=15$ cm, $AD=BC=30$ cm. Fie $A'$ proiecţia lui $A$ pe dreapta $CD$. Avem $A'D=x-y=\frac{45-15}{2}=15$; $AD=30$. Deci $A'D=\frac{1}{2}AD$. Rezultă că $m(\widehat{A'AD})=30°$. Deci $m(\widehat{DAB})=60°=m(\widehat{ABC})$ şi $m(\widehat{BCD})=m(\widehat{ADC})=120°$.

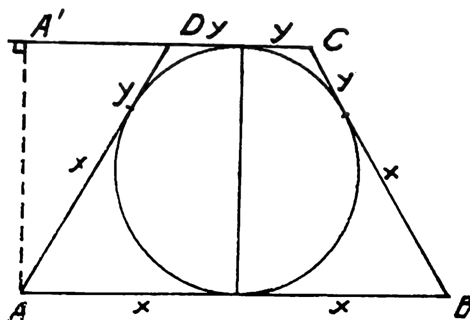



*Fig. VII.G.46.*

**VII.G.47.** a) $A$ şi $E$ sînt simetrice faţă de dreapta $BC$. Rezultă că dreapta $BC$ este mediatoarea segmentului $AE$. Deci triunghiul $ABE$ este isoscel. Deci $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle BEA$. (1)

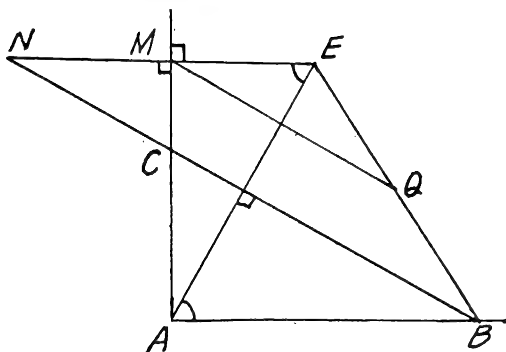



*Fig. VII.G.47.*

Dar $AB \parallel NE$, fiind perpendiculare pe aceeași dreaptă. Rezultă că
$\sphericalangle AEM \equiv \sphericalangle BAE$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle NEA \equiv \sphericalangle BEA$. Rezultă că semidreapta $EA$ este bisectoarea unghiului $NEB$. Dar, conform ipotezei $AE$ este mediatoarea segmentului $MQ$. Deci dreapta $AE$ este bisectoare în triunghiul isoscel $MEQ$. Rezultă că $\sphericalangle BEA \equiv \sphericalangle QEA$. Deci punctele $Q$, $B$, $E$ sînt coliniare.

b) Deoarece $AE \perp NB$, $AE \perp MQ$, rezultă că $NB \parallel MQ$, deci $MQBN$ este trapez. Din cele arătate la a) rezultă că dreapta $AE$ este axă de simetrie a trapezului $MQBN$. Deoarece admite axă de simetrie, trapezul $MQBN$ este isoscel, deci inscriptibil. (Vezi fig. VII.G.47.).

**VII.G.48.** a) În patrulaterul $CPMN$, $PN$ și $MC$ sînt diagonale și $m(\widehat{NPC}) = m(\widehat{CMN}) = 90°$. Rezultă că $CPMN$ este inscriptibil. (Vezi fig. VII.G.48.).

b) Deoarece $CPMN$ este inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle ANC \equiv \sphericalangle MPA$. (1)

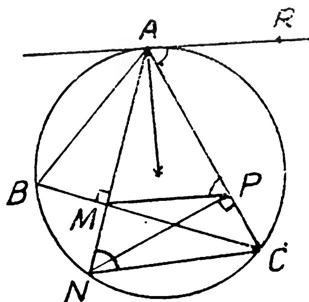



*Fig. VII.G.48.*

Fie $R$ pe tangenta prin $A$ la cercul circumscris lui $ABC$, $R$ de aceeași parte cu $P$ față de diametrul care trece prin $A$. Avem că :

$$m(\widehat{ANC}) = m(\widehat{RAC}) = \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}. \tag{2}$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle MPA \equiv \sphericalangle RAC$. Rezultă că $MP \parallel AR$, deoarece determină cu secanta $AP$ unghiuri alterne interne congruente.

**VII.G.49.** Fie $TMP$ tangenta comună la cele două cercuri, $T$ în același semiplan determinat de dreapta $O_1O_2$, ca și $B$, $P$ în celălalt semiplan. (Vezi fig. VII.G.49.).

$$\text{Avem : } m(\widehat{TMB}) = \frac{m(\overset{\frown}{MB})}{2} = \frac{m(\widehat{MO_2B})}{2}; \tag{1}$$

$$m(\widehat{PMA}) = \frac{m(\overset{\frown}{MA})}{2} = \frac{m(\widehat{MO_1A})}{2}. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\sphericalangle MO_1A \equiv \sphericalangle MO_2B$. (Obţinem acelaşi lucru observînd că în triunghiurile isoscele $O_1AM$ şi $O_2BM$, avem $\widehat{O_1MA} \equiv \equiv \widehat{O_2MB}$, deoarece sînt opuse la vîrf).

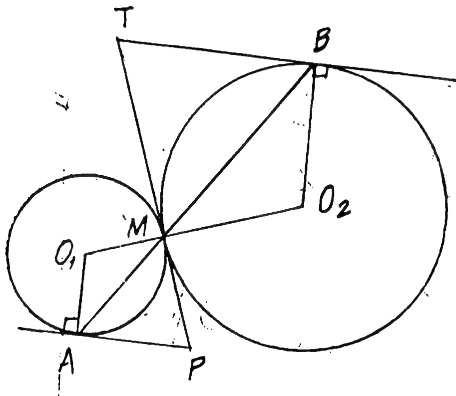



*Fig. VII.G.49.*

Deoarece dreptele $O_1A$ şi $O_2B$ determină cu secanta $O_1O_2$ unghiuri alterne interne congruente, rezultă că sînt paralele. Perpendicularele pe fiecare din aceste drepte sînt de asemenea paralele.

**VII.G.50.** CAZUL I

Dacă în cercul (O), $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{AB}$, tangenta în $B$ la cercul $O$ şi dreapta $AC$ se intersectează în semiplanul determinat de dreapta $BC$ ce conţine arcul mic $BC$. (Vezi fig. **VII.G.50 a.**).

a) Fie $T$ situat pe semidreapta $DB$, în afara segmentului $DB$. Avem:

$$m(\widehat{TBA}) = m(\widehat{ACB}) = \frac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}; \tag{1}$$

$\sphericalangle EBD \equiv \sphericalangle TBA$, fiind opuse la vîrf ; **(2)**

$\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle ACB$, deoarece $BEDC$ este înscris în cerc. **(3)**

Din (1), (2) şi (3) rezultă că $\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle EBD$, deci triunghiul $BDE$ este isoscel.

b) Avem $\sphericalangle CED \equiv \sphericalangle DBC \equiv \sphericalangle BAC$.

Deoarece $\sphericalangle CED \equiv \sphericalangle EAC$, dreapta $DE$ este tangentă cercului circumscris triunghiului $ACE$.

c) Fie $F$ intersecţia dreptelor $AO$ şi $DE$. Fie $H$ proiecţia lui $O$ pe dreapta $AC$ şi $H'$ punctul de intersecţie al dreptei $OH$ cu cercul (O). Deoarece $OH \perp AC$, $H'$ este mijlocul lui $\overset{\frown}{AC}$. Deci $m(\widehat{AOH}) = m(\overset{\frown}{AH'}) =$

$$= \frac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = m(\widehat{ABC}). \tag{4}$$

Dar $B, C, D, E$ sînt conciclice, deci $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CDE$. (5)

Cum $H, C$ sînt pe dreapta $AD$ ; din (4) şi (5) rezultă că $\sphericalangle \widehat{AOH} \equiv \equiv \sphericalangle \widehat{HDF}$. Deci patrulaterul $OFDH$ este inscriptibil, deci $m(\widehat{OFD}) = m(\widehat{OHA}) = 90°$. Deci dreptele $AO$ şi $DE$ sînt perpendiculare.

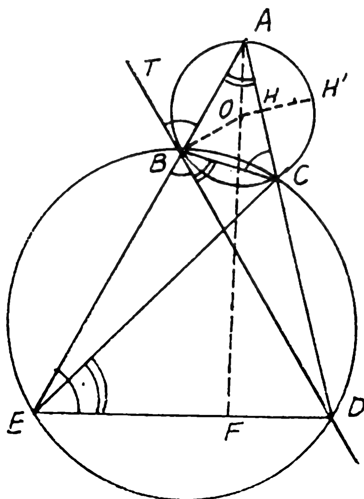



Fig. VII.G.50.a.

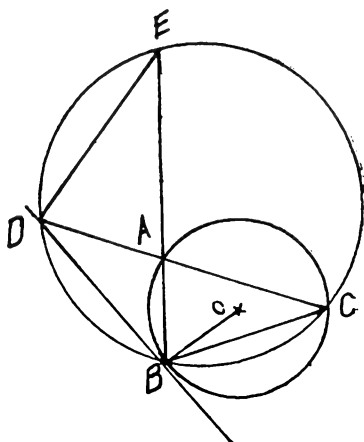



Fig. VII.G.50.b.

CAZUL II :

Dacă, în cercul (O), $\widehat{BC} > \widehat{AB}$, tangenta în $B$ la cercul (O) şi dreapta $AC$ se intersectează în semiplanul determinat de dreapta $CB$ ce conţine punctul $A$. (Vezi fig. VII.G.50 b.).

Demonstraţia se face asemănător cazului I.

CAZUL III :

Dacă $BC = AB$, tangenta în $B$ este paralelă cu dreapta $AC$ şi problema nu are soluţie.

**VII.G.51.** CAZUL I :

Dacă $AB > AC$, atunci $H$ este exterior segmentului $A'B$ (Vezi fig. VII.G.51.a.).

a) Dreptele $AC'$ şi $EB'$ sînt paralele. Rezultă că $\sphericalangle C'AE \equiv \sphericalangle AEB'$ (alterne interne). Dar $\sphericalangle C'AE \equiv \sphericalangle EAB'$, dreapta $AE$ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{C'AB'}$.

Din afirmaţiile de mai sus, rezultă că $\sphericalangle EAB' \equiv \sphericalangle AEB'$, deci triunghiul $AEB'$ este isoscel. Rezultă că $AB' = EB'$. Dar $AB' = B'C$, deci $AB' = B'C = EB'$. Rezultă că triunghiul $AEC$ este dreptunghic în

$E$. Deci $m(\widehat{AEC}) = 90°$. Dar $m(\widehat{AHC}) = 90°$. Deci punctele $A$, $E$, $C$, $H'$ sînt conciclice.

b) Deoarece $\sphericalangle C'FA \equiv \sphericalangle FAC$ (unghiuri alterne interne) și $\sphericalangle C'AF \equiv \equiv \sphericalangle FAC$, rezultă că $\sphericalangle C'AF \equiv \sphericalangle C'FA$, deci triunghiul $AC'F$ este isoscel. Rezultă că $AC' = BC' = C'F$, deci triunghiul $BFA$ este dreptunghic în $F$, deci $m(\widehat{AFB}) = 90°$; dar $m(\widehat{AEC}) = 90°$ și deci dreptele $CE$ și $BF$ sînt paralele.

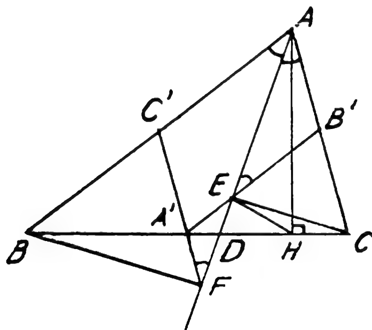



Fig. VII.G.51.a.

CAZUL II :

Dacă $AB < AC$, atunci $H$ este exterior segmentului $A'C$. (Vezi fig. VII.G.51.b.). Demonstrația se face în mod analog.

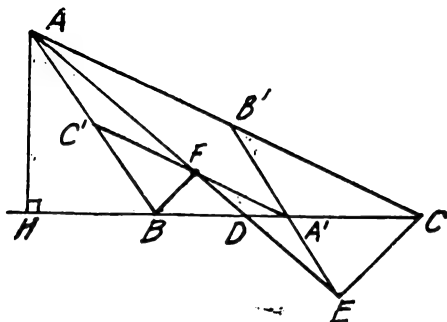



Fig. VII.G.51.b.

CAZUL III :

Dacă $AB = AC$, punctele $A'$, $D$, $H$, $E$, $F$ coincid.

**VII.G.52.** a) Fie $ABC$ un triunghi ascuțitunghic. (Vezi fig. VII.G.52.a.). Fie $B_1$, $C_1$ picioarele înălțimilor duse din $B$, respectiv $C$. Deoarece $HA' = = A'A''$, $BA' = A'C$, patrulaterul $HBA''C$ este paralelogram. Rezultă că

$BB_1 \parallel A''C$, $CC_1 \parallel A''B$. Dar $CC_1 \perp AB$, deci $A''B \perp AB$ şi $BB_1 \perp AC$, deci $A''C \perp AC$. Rezultă că :

$A$, $B$, $A''$ determină un cerc de diametru $AA''$ (1)

$A$, $C$, $A''$ determină un cerc de diametru $AA''$ (2)

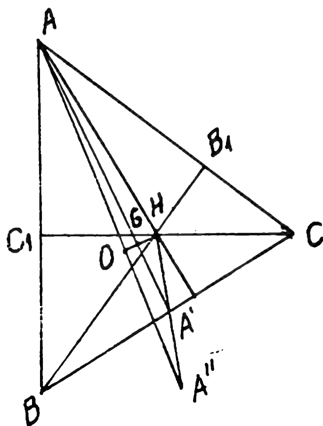



*Fig. VII.G.52.a.*

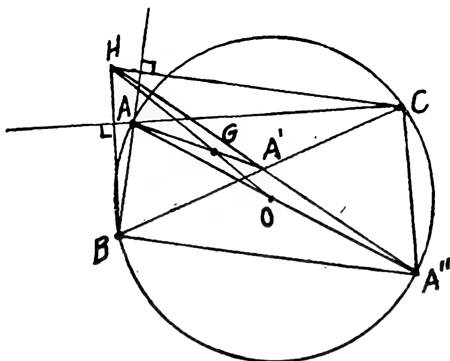



*Fig. VII.G.52.b.*

Din (1) şi (2) obţinem că $A$, $B$, $C$, $A''$ sînt conciclice, deci $A''$ se află pe cercul circumscris triunghiului $ABC$ şi $AA''$ este diametrul acestui cerc.

b) Fie $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$. Fie $O$ intersecţia dreptelor $HG$ şi $AA''$. Vom arăta că $O$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$.

$AA'$ este mediană în triunghiul $ABC$, $G$ este centrul de greutate, deci :

$$\frac{AG}{AA'} = \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Dar $AA'$ este mediană în triunghiul $AHA''$ și din (3) rezultă că $G$ este centrul de greutate al triunghiului $AHA''$. Deci $HO$ este mediană în acest triunghi. Rezultă că $AO = OA''$. Din a) știm că $AA''$ este diametrul cercului circumscris triunghiului $ABC$. Cum $O$ este mijlocul lui $AA''$ rezultă că $O$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$, deci punctele $H$, $G$, $O$ sînt coliniare.

Demonstrația se face analog în cazul în care triunghiul $ABC$ este obtuzunghic. (Vezi fig. VII.G.52 b).

**VII.G.53.** Fie $ABC$ un triunghi ascuțitunghic și $B'$, $C'$ proiecțiile lui $B$, respectiv $C$ pe laturile opuse. (Vezi fig. VII.G.53 a).

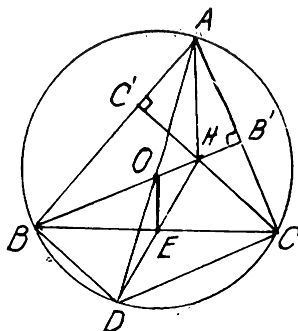



*Fig. VII.G.53.a.*

a) METODA 1

Unghiul $ABD$ este înscris într-un semicerc. Rezultă că : $BD \perp AB$. Dar $CC' \perp AB$ ($CC'$ înălțime în triunghiul $ABC$). Rezultă că $BD \parallel CC'$, deci : $BD \parallel CH$. (1)

Analog, $CD \perp AC$ și $BB' \perp AC$, deci $CD \parallel BH$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $BDCH$ este paralelogram.

METODA 2

Patrulaterul $AC'HB'$ este inscriptibil ($m(\widehat{AC'H}) + m(\widehat{AB'H}) = 180°$). Rezultă că unghiurile $C'HB'$ și $C'AB'$ sînt suplementare. Dar $\sphericalangle BHC \equiv \sphericalangle C'HB'$, fiind opuse la vîrf. Rezultă că $\sphericalangle$BHC și $\sphericalangle$BAC sînt suplementare. Cum $ABDC$ este înscris în cerc, rezultă că $\sphericalangle$BDC și $\sphericalangle$BAC sînt suplementare. Deci, $\sphericalangle BDC \equiv \sphericalangle$BHC (avînd același suplement). (3)

Pe de altă parte, $m(\widehat{ABD}) = 90°$ ; $m(\widehat{ACD}) = 90°$ (fiind unghiuri înscrise în semicercuri). Deoarece $BCB'C'$ este inscriptibil, rezultă că

$\sphericalangle C'BB' \equiv \sphericalangle B'CC'$. Deci $m(\widehat{HBD}) = 90° - m(\widehat{C'BB'}) = 90° - m(\widehat{C'CB'}) =$
$= m(\widehat{HCD})$. Adică :

$$\sphericalangle HBD \equiv \sphericalangle HCD. \quad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă că patrulaterul $BDCH$, avînd unghiurile opuse congruente, este paralelogram.

b) METODA 1

Fie $E$ piciorul perpendicularei duse din $O$ pe $BC$. Avem $BE = EC$. (Perpendiculara din centrul unui cerc pe o coardă a cercului trece prin mijlocul coardei). Dar $BC$ este diagonală în paralelogramul $BHCD$ şi $HD$ la fel. Într-un paralelogram, diagonalele se intersectează la mijlocul fiecăreia. Rezultă că $HD$ trece prin $E$. În triunghiul $AHD$ avem : $OD = OA$, $DE = EH$. Rezultă că $OE$ este linie mijlocie, deci $OE = \frac{AH}{2}$.

METODA 2 :

Deoarece $OE$ şi $AH$ sînt perpendiculare pe $BC$ rezultă că $OE \parallel AH$. Cum $OA = OD$ rezultă că $OE$ este linie mijlocie în triunghiul $ADH$, deci $OE = \frac{AH}{2}$.

Raţionamentul este analog în cazul unui triunghi $ABC$ obtuzunghic. (Vezi fig. VII.G.53.b.).

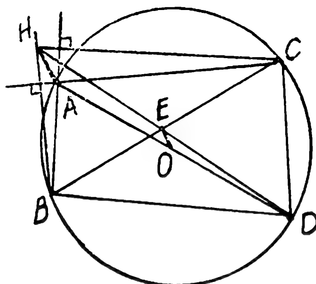



*Fig. VII.G.53.b.*

**VII.G.54.** METODA 1

Arătăm că $m(\widehat{BMC}) = 180°$. (Vezi fig. 54.a.)

Deoarece $MM'$ este diametru, $m(\widehat{MPM'}) = 90° = m(\widehat{MPB})$. Cum $m(\widehat{MNB}) = 90°$, rezultă că patrulaterul $MPNB$ este inscriptibil. Deci : $\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle BPN$. Avem : $\sphericalangle BPN \equiv \sphericalangle CPM'$ (unghiuri opuse la vîrf). Dar patrulaterul $M'PMC$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle CPM' \equiv \sphericalangle CMM'$. Triunghiul $COM$ este isoscel, deci $\sphericalangle CMM' \equiv \sphericalangle MCO$. Rezultă că

$$\sphericalangle MCO \equiv \sphericalangle BMN. \quad (1)$$

Fig. VII.G.54.a.

Cum $MN \parallel AC$, rezultă

$$\sphericalangle NMO \equiv \sphericalangle COM. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem: $m(\widehat{BMC}) = m(\widehat{BMN}) + m(\widehat{NMO}) + m(\widehat{OMC}) = m(\widehat{MCO}) + m(\widehat{COM}) + m(\widehat{OMC})$. Cum $\sphericalangle MCO$, $\sphericalangle COM$, $\sphericalangle OMC$ sînt unghiurile aceluiaşi triunghi, rezultă că $m(\widehat{BMC}) = 180°$. Deci punctele $C$, $M$, $B$ sînt coliniare.

METODA 2

Vom arăta că $MC \parallel AM'$ şi $MB \parallel AM'$ (Vezi fig. VII.G.54.b.)

Patrulaterul $AM'CM$ este dreptunghi, deoarece diagonalele $AC$ şi $MM'$ sînt congruente şi se taie în părţi congruente. Rezultă că :

$$MC \parallel AM' \qquad (3)$$

Fig. VII.G.54.b.

Patrulaterul $MBNP$ este inscriptibil ($m(\widehat{MPB}) = m(\widehat{MNB}) = 90°$). Rezultă că $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MNP$. Dar $MN \parallel AC$, deci $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle NCA$ (alterne interne).

Patrulaterul $AM'CP$ este înscris în cerc, deci $\sphericalangle NCA \equiv \sphericalangle PM'A$.

Deci $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle PM'A$. Rezultă că $MB \parallel AM'$ (4)

Conform axiomei paralelelor, prin $M$ trece o singură dreaptă paralelă cu dreapta $AM'$, deci din (3) și (4) rezultă că dreptele $MC$ și $MB$ coincid, adică punctele $B$, $M$, $C$ sînt coliniare.

METODA 3 (Vezi fig. VII.G.54.b.)

Deoarece $PMBN$ este inscriptibil, rezultă că $\sphericalangle PMB \equiv \sphericalangle PNA$ (5)

Dar $\sphericalangle PMA \equiv \sphericalangle PCA$ (subîntind arcul $AP$). (6)

În triunghiul $ACN$, $\sphericalangle PCA$ și $\sphericalangle PNA$ sînt complementare. Din (5) și (6) rezultă că și $\sphericalangle PMA$ și $\sphericalangle PMB$ sînt complementare. Deci $m(\widehat{AMB}) = 90°$. Pe de altă parte, $m(\widehat{AMC}) = 90°$. Rezultă că $m(\widehat{CMB}) = 90° + 90° = 180°$.

**VII.G.55.** a) METODA 1:

Deoarece $TC \perp AC$, $CF = AC$, rezultă că dreapta $TC$ este mediatoarea segmentului $AF$. Rezultă că:

$$\sphericalangle TAC \equiv \sphericalangle CFT. \quad (1)$$

Dar $$m(\widehat{TAC}) = m(\widehat{TMB}) = \frac{m(\widehat{BT})}{2} \quad (2)$$

Triunghiul $MOT$ e isoscel; rezultă

$$\sphericalangle OTM \equiv \sphericalangle TMB. \quad (3)$$

Din (1), (2), (3) rezultă că:

$$\sphericalangle OTM \equiv \sphericalangle CFT. \quad (4)$$

Dar $OT \parallel AF$. (5)

Din (4) și (5) rezultă că dreptele $MT$ și $TF$ coincid, deci punctele $M$, $T$, $F$ sînt coliniare.

METODA 2:

Fie $NT$ diametrul ce conține $OT$. Deoarece $\triangle MOT \equiv \triangle BON$, rezultă că $NB \parallel MT$. (6)

Deoarece $NT \parallel AB$, rezultă că $NTBA$ este trapez isoscel. Rezultă că $NB = AT$ (fiind diagonale într-un trapez isoscel). Cum dreapta $TC$ este mediatoarea segmentului $AF$, rezultă că $FT = AT$.

Deci $NB = FT$. (7)

Dar $NT \parallel BF$. (8)

Din (7) şi (8) rezultă că $NTFB$ este trapez isoscel sau paralelogram. Dar $\sphericalangle TNB$ este ascuţit (în $\triangle NTB$, $m(\widehat{B}) = 90°$), iar $NTF$ obtuz. Rezultă că $NTFB$ este paralelogram. Deci :

$$NB \parallel FT. \tag{9}$$

Din (6) şi (9) în conformitate cu axioma paralelelor, rezultă că dreptele $MT$ şi $FT$ coincid.

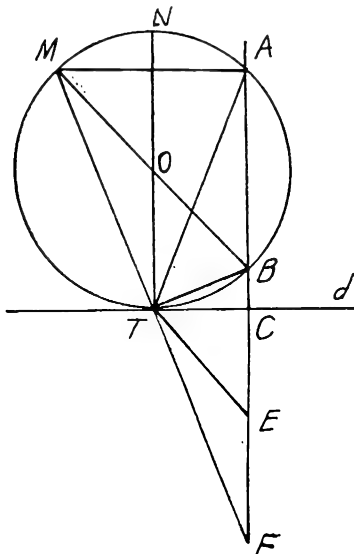



*Fig. VII.G.55.*

METODA 3 :

Avem $m(\widehat{BTM}) = 90°$, deoarece subîntinde diametrul $BM$. $ABTM$ este înscris în cerc, deci $\sphericalangle TBF \equiv \sphericalangle TMA$.

Pe de altă parte, $\sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle BAT$ (subîntind acelaşi arc). Cum dreapta $TC$ este mediatoarea segmentului $AF$, avem $\sphericalangle TAB \equiv \sphericalangle TFC$. Deci $\sphericalangle BTC \equiv \sphericalangle TFC$. În triunghiul $TFC$, unghiurile $TFC$ şi $CTF$ sînt complementare, deci şi $\widehat{BTC}$ şi $\widehat{CTF}$ sînt complementare. Rezultă că $m(\widehat{BTF}) = 90°$.

În concluzie, $m(\widehat{MTF}) = 90° + 90° = 180°$.

b) Din a) rezultă că $m(\widehat{BTF}) = 90°$. Segmentul $TE$ este mediană în triunghiul dreptunghic $TBF$, deci $TE = \frac{BF}{2} = BE$. Rezultă că triunghiul $TEB$ este isoscel.

c) Vom arăta că $AOTE$ este trapez isoscel, deci inscriptibil. Din $TE = EF$ rezultă că $\sphericalangle EFT \equiv \sphericalangle ETF$. Notăm $m(\widehat{EFT}) = \alpha$; $\sphericalangle TEB$ este unghi exterior triunghiului $TEF$. Rezultă că

$$m(\widehat{TEB}) = 2\alpha. \tag{10}$$

Triunghiul $TOA$ este isoscel. Din cele obţinute anterior, rezultă că $m(\widehat{OAT}) = m(\widehat{OTA}) = \alpha$.

Deci $m(\widehat{OAB}) = 2\alpha.$ (11)

Cum $OT \parallel AE$, din (10) şi (11) rezultă că $AOTE$ este trapez isoscel.

**VII.G.56.** Fie $M$ intersecţia dreptelor $A'B'$ şi $OO'$

Arătăm că $M \in C(O, r)$. (Vezi fig. VII.G.56.a.).

*Fig. VII.G.56.a.*

Avem : $m(\widehat{A'AO}) = 90^\circ = m(\widehat{OBB'})$ $AA' = BB'$ (fiind diferenţe de segmente congruente) ; $OA = OB$ (fiind raze în acelaşi cerc). Rezultă că : $\triangle OA'A \equiv \triangle OB'B$ (C.C.). Deci $OA' = OB'$ Rezultă că $O$ aparţine mediatoarei segmentului $A'B'$ ; la fel $O'$. Deci $A'B' \perp OO'$. (1)

Avem : $\sphericalangle OA'M \equiv \sphericalangle OB'M \equiv \sphericalangle OB'A'$. Dar $\sphericalangle OB'A' \equiv \sphericalangle OA'A$. Rezultă că $\sphericalangle OA'A \equiv \sphericalangle OA'M$. Deci $\triangle AA'O \equiv \triangle MA'O$ (I.U.).

Rezultă că :

$$OM = OA = r. \tag{2}$$

Din (1) şi (2) rezultă că dreapta $A'B'$ este tangentă în $M$ la cercul de centru $O$.

b) (Vezi fig. VII.G.56.b.) Avem

$$m(\widehat{OO'B'}) = m(\overset{\frown}{OB'}). \tag{3}$$

Deoarece $OO' \parallel AC$, rezultă că :

$$\sphericalangle ACB' \equiv \sphericalangle OO'B' ; \tag{4}$$

$$m(\widehat{AA'B'}) = \frac{m(\overset{\frown}{A'B'})}{2} = m(\overset{\frown}{OB'}). \tag{5}$$

Din (3), (4), (5) rezultă că $\sphericalangle AA'B' \equiv \sphericalangle ACB'$; deci patrulaterul $AB'CA'$ este inscriptibil.

*Fig. VII.G.56.b.*

c) Vom arăta că $\sphericalangle SQC \equiv \sphericalangle PQC$, de unde rezultă că $S$ aparține dreptei $QP$). (Vezi fig. VII.G.56.c.)

Patrulaterul $AQCP$ este inscriptibil ($m(\widehat{Q}) = m(\widehat{P}) = 90°$). Rezultă că :

$\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PQC.$ (6)

*Fig. VII.G.56.c.*

Patrulaterul $AB'CA'$ este inscriptibil. Rezultă că :

$\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle A'AC \equiv \sphericalangle A'B'C.$ (7)

Dar $\sphericalangle CQB' \equiv \sphericalangle B'SC$. Rezultă că $B'CSQ$ este inscriptibil. Deci :

$\sphericalangle A'B'C \equiv \sphericalangle SB'C \equiv \sphericalangle SQC.$ (8)

Din (8), (7), (6) rezultă că $\sphericalangle SQC \equiv \sphericalangle PQC$. Deci $Q$, $S$, $P$ sînt coliniare.

**VII.G.57.** a) Notăm $m(\widehat{BAC}) = 2\alpha$, $m(\widehat{ACB}) = 2\beta$.

Deci $m(\widehat{ABC}) = \alpha + \beta$. (1)

Deoarece $\sphericalangle NQA$ este unghi exterior triunghiului $AQC$, rezultă că :

$m(\widehat{NQA}) = m(\widehat{QAC}) + m(\widehat{QCA}) = \alpha + \beta$. (2)

Din (1), (2) rezultă că : $\sphericalangle NBM \equiv \sphericalangle NQA$ $(N \in AB,\ M \in BC)$. Deci patrulaterul $NBMQ$ este inscriptibil.

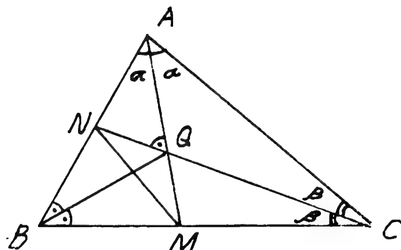



*Fig. VII.G.57.a.*

b) Deoarece $Q$ este punctul de intersecţie a două din bisectoarele triunghiului, $BQ$ este bisectoare. Deci :

$\sphericalangle NBQ \equiv \sphericalangle MBQ$. (3)

Deoarece $BMQN$ este inscriptibil : $\sphericalangle NBQ \equiv \sphericalangle QMN$. (4)

$\sphericalangle MBQ \equiv \sphericalangle QNM$. (5)

Din (3), (4) şi (5) rezultă că $\sphericalangle QNM \equiv \sphericalangle QMN$, deci triunghiul $NQM$ este isoscel.

c) Din relaţia dată în ipoteză rezultă că :

$m(\widehat{ABC}) = 60°$, deci $\alpha + \beta = 60°$. (6)

Pe de altă parte, din triunghiul isoscel $ANC$, obţinem :

$4\alpha + \beta = 180°$. (7)

Din (6) şi (7) rezultă $\alpha = 40°$, deci $m(\widehat{BAC}) = 80°$.

d) (Vezi fig. VII.G.57.b.) Deoarece dreapta $BQ$ este bisectoarea unghiului $ABC$, $QP = QT$. (8)

Deoarece triunghiul $NQM$ este isoscel, $NQ = MQ$. (9)

Din (8) şi (9) rezultă că triunghiurile dreptunghice $PQN$ şi $TQM$ sînt congruente (I.C.). Din congruenţa triunghiurilor $BPQ$ şi $BTQ$ şi din (6) rezultă că triunghiul $BPT$ este echilateral.

e) Afirmaţia este valabilă în următorul context mai general :

„Fie $XBY$ un unghi şi $BQ$ bisectoarea lui. Fie $P$, $T$ proiecţiile lui $Q$ pe laturile $OX$, $OY$. Se construiesc $N$ între $B$ şi $P$, şi $M$ astfel încît $T$ să fie între $B$ şi $M$ cu condiţia ca $\sphericalangle PQN \equiv \sphericalangle TQM$. $MN$ şi $BQ$ se intersectează în $R$. Punctele $P$, $R$, $T$ nu pot fi coliniare."

Demonstraţie. (Vezi fig. VII.G.57.b.)

Presupunem că punctele $P$, $R$, $T$ sînt coliniare. Avem : $\triangle PQN \equiv \equiv \triangle TQM$ (C.U.). Rezultă

$$NP = TM. \quad (1)$$

Construim $N'$ pe $BT$ astfel încît :

$$N'T = TM. \quad (2)$$

Dreapta $BQ$, fiind bisectoarea $\sphericalangle XBY$, este axă de simetrie pentru configurația obținută. Deci avem $PR = RT$ și $\sphericalangle BPR \equiv \sphericalangle BTR$. (3)

Din (1), (2) și (3) rebultă că $\triangle RTN' \equiv \triangle RPN$ (L.U.L.).

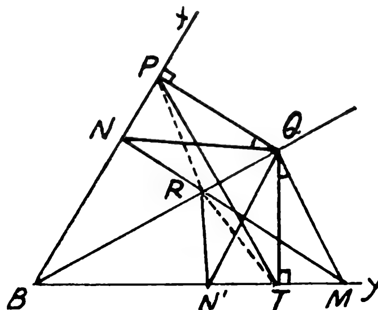



*Fig. VII.G.57.b.*

Deci $\sphericalangle TRN' \equiv \sphericalangle NRP$. Dar $\sphericalangle NRP \equiv \sphericalangle MRT$, fiind opuse la vîrf. Rezultă că, în triunghiul $RMN'$, mediana $RT$ este și bisectoare. Rezultă că triunghiul $RMN'$ este isoscel. Deci $RT \perp BM$. Dar avem $QT \perp BM$, ceea ce contrazice unicitatea perpendicularei construite dintr-un punct pe o dreaptă. Deci presupunerea făcută este falsă ; punctele $P$, $R$, $T$ nu pot fi coliniare.

**VII.G.58.** Fie $BB'$ mediană în triunghiul $ABC$, $B' \in AC$ și $F$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$. Avem $C'F = \frac{1}{3} \cdot CC'$, deci $C'D = C'F = \frac{1}{3} \cdot CC'$. Rezultă că : $DF = C'D + C'F = \frac{2}{3} \cdot CC'$. Cum $\frac{2}{3} \cdot CC' = FC$, rezultă că $DF = FC$. Cum $BE = BC$, rezultă că $BF$ este linie mijlocie în triunghiul $DEC$. Deci

$$BF \parallel DE. \quad (1)$$

Deoarece $C'D = C'F$ și $AC' = C'B$ ($CC'$ mediană), $DBFA$ este paralelogram. Deci :

$$AD \parallel BF. \quad (2)$$

Din (1) şi (2), conform axiomei paralelelor, rezultă că $E, D, A$, sînt coliniare. Deci $p_1$ este o propoziţie adevărată.

Pentru $p_2$, dăm un contraexemplu : arătăm că dacă triunghiul $ABC$ este dreptunghic isoscel, atunci patrulaterul $ADBC$ nu este inscriptibil. Presupunem că $ADBC$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\widehat{CDB}) = 90°$. Rezultă că $m(\widehat{AFC'}) = 90°$, deci

$$AF \perp CC'. \tag{3}$$

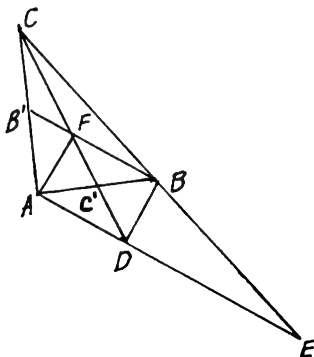



*Fig. VII.G.58.*

Întrucît triunghiul $ABC$ este isoscel, mediana $AF$ este şi înălţime, deci :

$$AF \perp BC. \tag{4}$$

Cum dreptele $CB$ şi $CC'$ sînt concurente şi diferite, afirmaţiile (3) şi (4) sînt contradictorii. Deci, presupunerea făcută este falsă, deci, în acest caz, $ADBC$ nu este inscriptibil. Rezultă că $p_2$ este falsă.

**VII.G.59.** CAZUL 1

Considerăm $\sphericalangle\, OAB \equiv \sphericalangle\, OBA$. (Vezi fig. VII.G.59.)

Deoarece $\sphericalangle\, CAB \equiv \sphericalangle\, AOB$ şi $\sphericalangle\, ABC \equiv \sphericalangle\, ABO$ rezultă că : $\triangle ABC \sim \triangle OBA$. Cum triunghiul $AOB$ este isoscel, rezultă că şi triunghiul $ABC$ este isoscel. Deci

$$AB = AC. \tag{1}$$

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = \dfrac{180° - 36°}{2} = 72°$ ; $\sphericalangle\, ACB$ este unghi exterior triunghiului $AOC$. Deoarece $m(\widehat{ACB}) = 72°$, $m(\widehat{AOC}) = 36°$, rezultă că $m(\widehat{OAC}) = 36°$. Deci triunghiul $OAC$ este isoscel. Rezultă că :

$$OC = AC. \tag{2}$$

Fig. VII.G.59.

Conform (1) şi (2) obţinem $OC = AB = AC$. Triunghiurile $ACO$ şi $AOB$ nu sînt asemenea.

CAZUL 2

Considerăm $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle OAB$. Obţinem analog : $OC = AB = AC$.

**VII.G.60.** (Vezi fig. VII.G.60.) Deoarece $AD \parallel FB$, conform teoremei lui Thales, rezultă că

$$\frac{BE}{ED} = \frac{EF}{AE}. \qquad (1)$$

Analog, $AB \parallel GD$. Deci :

$$\frac{AE}{EG} = \frac{BE}{ED}. \qquad (2)$$

Fig. VII.G.60.

Din (1) și (2) rezultă

$$\frac{AE}{EG}=\frac{EF}{AE}, \text{ deci } AE^2=EG\cdot EF.$$

**VII.G.61.** (Vezi fig. VII.G.61.) Deoarece $MN \parallel AB$, conform teoremei fundamentale a asemănării, $\triangle MNC \sim \triangle ABC$. Deci :

$$\frac{MN}{AB}=\frac{MC}{AC} \quad (1)$$

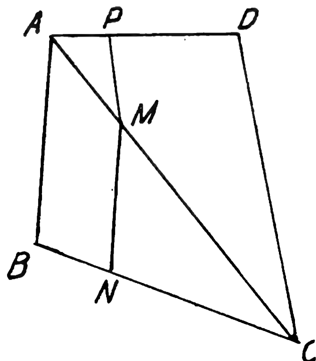



*Fig. VII.G.61.*

Analog, deoarece $MP \parallel CD$ :

$$\frac{MP}{CD}=\frac{AM}{AC} \quad (2)$$

Însumînd relațiile (1) și (2) obținem :

$$\frac{MN}{AB}+\frac{MP}{CD}=\frac{MC}{AC}+\frac{AM}{AC}=\frac{AC}{AC}=1.$$

**VII.G.62.** (Vezi fig. VII.G.62.) Dacă $BC^2=CD\cdot EF$, atunci :

$$\frac{BC}{EF}=\frac{CD}{BC} \quad (1)$$

Deoarece $EF \parallel BC$, conform teoremei fundamentale a asemănării, rezultă :

$$\frac{BD}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CD}{DF}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $BC=DF$. (3)

Conform teoremei bisectoarei în triunghiul $ABD$, obţinem :

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BE}{DE}. \tag{4}$$

Folosind relaţiile (3), (2) şi (4) obţinem :

$$\frac{CD}{BC}-\frac{AB}{AD}=\frac{CD}{DF}-\frac{AB}{AD}=\frac{BD}{DE}-\frac{BE}{DE}=\frac{BD-BE}{DE}=\frac{DE}{DE}=1.$$

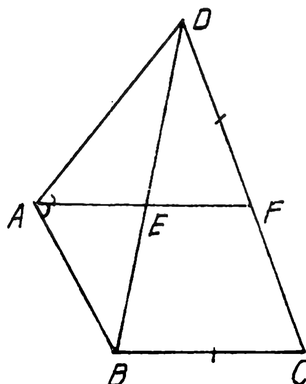



*Fig. VII.G.62.*

**VII.G.63.** (Vezi fig. VII.G.63.) Notăm lungimile laturilor $CD$, $BC$, $MB$, $ND$ cu respectiv $a$, $b$, $x$, $y$.

a) Aplicînd teorema fundamentală a asemănării, obţinem următoarele proporţii :

$$\frac{x}{x+b}=\frac{a}{a+y}; \quad \frac{y}{y+a}=\frac{b}{x+b}.$$

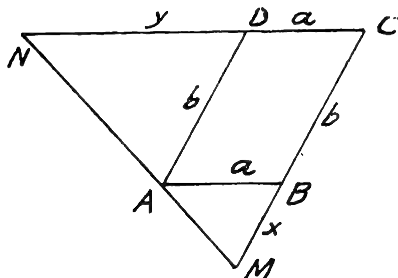



*Fig. VII.G.63.*

Înmulțind relațiile, avem

$$\frac{xy}{(x+b)(y+a)}=\frac{ab}{(a+y)(x+b)}$$

Deci $xy = ab =$ constant.

Altfel : Aplicînd teorema fundamentală a asemănării în triunghiurile $ABM$ și $NDA$, obținem

$$\frac{x}{b}=\frac{a}{y},$$

adică $xy = ab$.

b) Avem $CM\cdot CN = (x+b)(y+a) = xy + ax + by + ab$. **(1)**

Conform a), avem $xy = ab$. Deci : $CM\cdot CN = ab + ax + by + ab = a(b+x) + b(a+y) = AB\cdot CM + BC\cdot CN$.

**VII.G.64.** (Vezi fig. VII.G.64.) Deoarece $CC' \parallel BB'$, $\triangle ACC' \sim \triangle AB'B$. Rezultă că :

$$\frac{CC'}{BB'}=\frac{AC'}{AB} \tag{1}$$

Deoarece $CC' \parallel AA'$, $\triangle BCC' \sim \triangle BA'A$. Rezultă că :

$$\frac{CC'}{AA'}=\frac{BC'}{AB}. \tag{2}$$

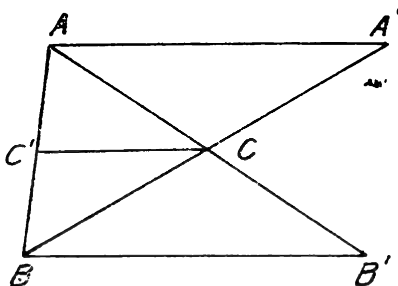



*Fig. VII.G.64.*

Din (1) și (2) prin adunare rezultă :

$$\frac{CC'}{BB'}+\frac{CC'}{AA'}=1.$$

Deci :

$$CC'=\frac{1}{\frac{1}{AA'}+\frac{1}{BB'}}=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}=\frac{1}{\frac{10}{21}}=\frac{21}{10}.$$

**VII.G.65.** (Vezi fig. VII.G.65.) Deoarece $AB' \parallel BA'$, conform teoremei lui Thales, rezultă :

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OB'}{OA'} \tag{1}$$

Deoarece $BC' \parallel CB'$, conform teoremei lui Thales avem :

$$\frac{OB}{OC}=\frac{OC'}{OB'}. \tag{2}$$

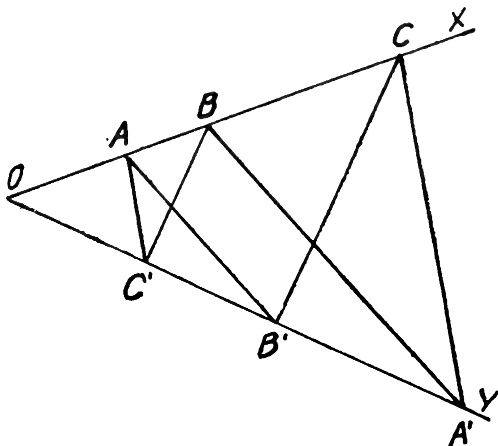



*Fig. VII.G.65.*

Înmulţind relaţiile (1) şi (2) obţinem

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OC'}{OA'}$$

Conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă că $AC' \parallel CA'$.

**VII.G.66.** (Vezi fig. VII.G.66.) Fie trapezul $ABCD$, $AD=a$, $BC=b$. Avem $\triangle AOD \sim \triangle COB$. Rezultă că $\frac{OD}{OB}=\frac{OA}{OC}=\frac{a}{b}$. (1)

$\triangle ABD \sim \triangle MBO$. Rezultă că : $\frac{a}{OM}=\frac{BD}{OB}$.

Din (1) obţinem $\frac{BD}{OB}=\frac{a+b}{b}$. Şi apoi $\frac{a}{OM}=\frac{a+b}{b}$, adică

$$OM=\frac{ab}{a+b}. \tag{2}$$

$\triangle\, BCD \sim \triangle\, OND$. Rezultă că $\dfrac{b}{ON} = \dfrac{BD}{OD}$ şi cu relaţia (1) obţinem :

$$ON = \frac{ab}{a+b}. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) rezultă $MN = OM + ON = \dfrac{2ab}{a+b}$.

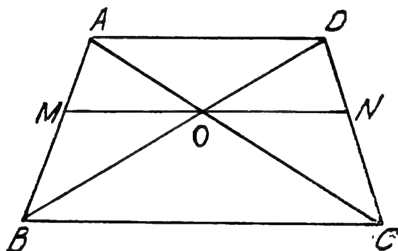


*Fig. VII.G.66.*

**VII.G.67.** (Vezi fig. VII.G.67.) Deoarece $AQ \,||\, NB$, conform teoremei fundamentale a asemănării rezultă că $\triangle\, AMQ \sim \triangle\, BMN$, deci :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{QA}{NB}. \tag{1}$$

Asemănător, $\triangle\, PNC \sim \triangle\, PQD$, deci

$$\frac{PC}{PD} = \frac{NC}{QD}. \tag{2}$$

Înmulţind relaţiile (1) şi (2) obţinem :

$\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{PC}{PD} = \dfrac{QA}{NB} \cdot \dfrac{NC}{QD}$. De unde : $\dfrac{MA}{MB} \cdot \dfrac{PC}{PD} \cdot \dfrac{QD}{QA} \cdot \dfrac{NB}{NC} = 1$.

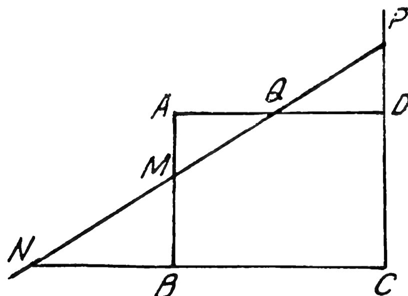


*Fig. VII.G.67.*

**VII.G.68.** CAZUL I

Triunghiul $ABC$ — ascuţitunghic în $A$. (Vezi fig. VII.G.68). Deoarece $MN \parallel BC$, rezultă că $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle NCB$ (unghiuri alterne-interne). Dar $\sphericalangle MNC \equiv \sphericalangle$ NCE. Rezultă că $\sphericalangle NCB \equiv \sphericalangle$ NCE, deci triunghiul $NEC$ este isoscel, deci $NE = EC$. (1)

Analog arătăm că triunghiul $BDM$ este isoscel, deci $BD = DM$. (2)

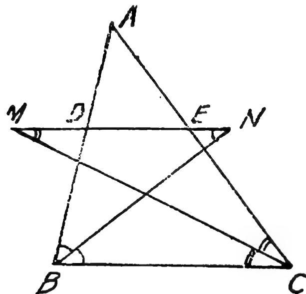



*Fig. VII.G.68.a.*

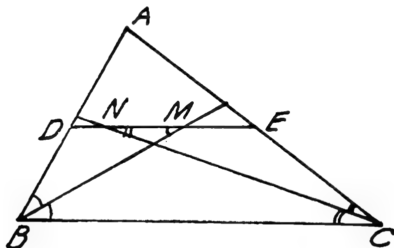



*Fig. VII.G.68.b.*

Folosind (1) şi (2) şi ordinea punctelor din figură, obţinem :

$$AB + AC = 2BD + 2EC = 2DM + 2NE = 2(DM + NE) =$$
$$= 2(ND + 2DE + EM) = 2(MN + DE) = 2MN + 2DE = 2MN + BC.$$

CAZUL II :

Triunghiul $ABC$ — obtuzunghic sau dreptunghic în A. (Vezi fig. VII.G.68. b.) Se arată ca în cazul I că triunghiurile $NEC$ şi $BDM$ sînt isoscele, deci $BD = DM$, $EC = NC$. Avem

$$AB + AC = 2BD + 2EC = 2(DM + NE) = 2(2MN + DN + ME) =$$
$$= 2(MN + DE) = 2MN + BC.$$

Observaţie. Faptul că acestea sînt singurele situaţii posibile rezultă din teorema prezentată în lista de indicaţii.

**VII.G.69.** METODA 1

Deoarece $AB$ şi $OC$ sînt perpendiculare şi se taie în părţi congruente, $AOBC$ este romb. (Vezi fig. VII.G.69.) Deoarece $BC \parallel AE$, rezultă că $\triangle BDC \sim \triangle ACE$. Deci: $\frac{BD}{AC} = \frac{BC}{AE}$. Rezultă că: $BD \cdot AE = AC \cdot BC = AC^2$.

METODA 2

Întrucît $OC \perp AB$, $C$ este mijlocul arcului $AB$, deci $AC = CB$. Cum $m(\widehat{AOC}) = 60°$ şi $AO = OC = r$, triunghiul $AOC$ este echilateral, deci

$AC = AO = r = OB$. (1)

Cum $m(\widehat{ACO}) = 60° = m(\widehat{COB})$, rezultă că $OD \parallel AC$, deci $\frac{OD}{AC} =$ $= \frac{OE}{AE}$. Se exprimă în această proporție $OD$ și $OE$ în funcție de lungimile care apar în relația de demonstrat și ținînd cont de (1), rezultă succesiv :

$$\frac{AC - BD}{AC} = \frac{AE - AC}{AE}\ ;\ 1 - \frac{BD}{AC} = 1 - \frac{AC}{AE}\ ;\ \frac{BD}{AC} = \frac{AC}{AE}$$

Deci : $AC^2 = BD \cdot AE$.

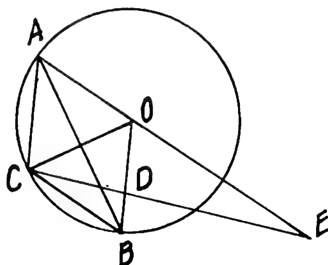


*Fig. VII.G.69.*

**VII.G.70.** (Vezi fig. VII.G.70.) Deoarece $AD$ este bisectoarea unghiului $BAC$, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$. **(1)**

Apoi, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle AEC$ (subîntind arcul $AC$). **(2)**

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle ABD \sim \triangle AEC$.

Deci : $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$. Rezultă $AB \cdot AC = AE \cdot AD$.

b) Avem $\triangle ABD \sim \triangle AEC$. Rezultă că :

$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{EC}$, deci : $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{EC}$. **(3)**

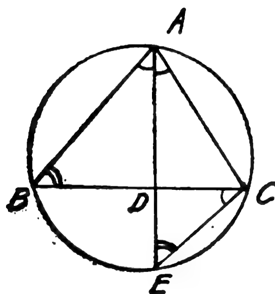


*Fig. VII.G.70.*

Deoarece $\triangle AEC \sim \triangle CED$ rezultă că :

$CE^2 = AE \cdot ED.$ (4)

Prin ridicare la pătrat, din relația (3) obținem :

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{AE^2}{CE^2}.$$

Înlocuind conform (4), rezultă

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{AE^2}{AE \cdot DE} = \frac{AE}{DE}.$$

**VII.G.71.** CAZUL I

Dacă $AB < AC$, rezultă că $E$ este între $B$ și $M$. (Vezi fig. VII.G.71.)

a) Avem : $\triangle ABM \sim \triangle CBA$ ($\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle BCA$, $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ABC$). Rezultă $\frac{AB}{CB} = \frac{BM}{AB}$. Deci : $AB^2 = BC \cdot BM = \frac{BC^2}{2}$, adică $BC^2 = 2AB^2$.

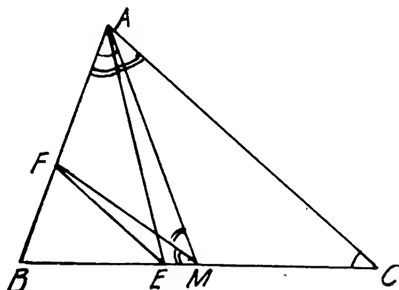



*Fig. VII.G.71.*

b) Deoarece $\triangle ABM \sim \triangle CBA$ rezultă că $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BAC$.

Cum $MF$ este bisectoarea unghiului $AMB$ și $AE$ bisectoarea unghiului $BAC$, rezultă $\sphericalangle FME \equiv \sphericalangle FAE$. Deci patrulaterul $AMEF$ este inscriptibil.

c) ntrucît $AFEM$ este inscriptibil, $\sphericalangle AEF \equiv \sphericalangle AMF$. Dar $\sphericalangle AMF \equiv \sphericalangle BMF \equiv \sphericalangle FAE \equiv \sphericalangle EAC$. Deoarece unghiurile $AEF$ și $EAC$ au poziție de unghiuri alterne-interne și sînt congruente, rezultă că $EF \parallel AC$.

CAZUL II :

Dacă $AB > AC$ rezultă că $E$ este între $M$ și $C$. Se demonstrează analog cazului I.

CAZUL III :

Dacă $AB = AC$, $E$ și $M$ coincid ; cele trei afirmații se verifică în mod evident.

**VII.G.72.** Putem avea $P$ între $B$ și $D$ sau $P$ între $C$ și $D$. Demonstrația este aceeași în ambele cazuri.

Fie $P$ între $C$ și $D$. (Vezi fig. VII.G.72.a.).

METODA 1

Deoarece $AD \parallel MP$, avem $\frac{AB}{AM} = \frac{BD}{DP}$. (2)

Deoarece $NP \parallel AD$, avem $\frac{AC}{AN} = \frac{CD}{DP}$. (3)

Dar $BD = CD$. (4)

Din (2), (3), (4) rezultă că $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$, deci $AM \cdot AC = AN \cdot AB$.

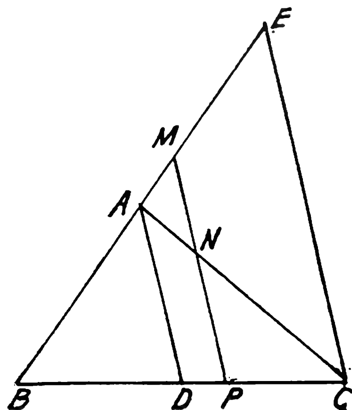



Fig. VII.G.72.a.

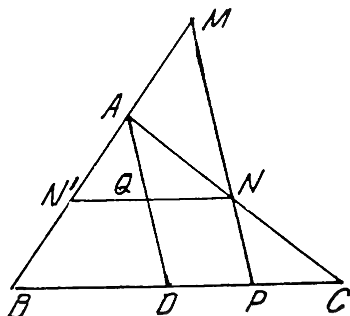



Fig. VII.G.72.b.

METODA 2

Construim din $C$ o paralelă la $AD$. Fie $E$ punctul de intersecție al acestei paralele cu dreapta $AB$. Deoarece $AD$ este linie mijlocie în triunghiul $BCE$, rezultă că $AB = AE$.

Deoarece $EC \parallel AD$ și $MN \parallel AD$, rezultă $EC \parallel MN$. De aici conform teoremei lui Thales, obținem $\frac{AM}{AN} = \frac{AE}{AC}$, apoi $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$, deci $AM \cdot AC = AN \cdot AB$.

METODA 3 :

Construim prin $N$ o paralelă la $BC$. (Vezi fig. VII.G.72.b.). Fie $Q$ și $N'$ punctele în care această paralelă intersectează dreapta $AD$, respectiv dreapta $AB$.

Deoarece $Q$ aparține medianei $AD$ și $QN \parallel BC$, rezultă că $N'Q = QN$. (5)

Dar $AQ \parallel MN$. (6)

Din (5) și (6) rezultă că $AN' = AM$. (7)

Deoarece $N'N \parallel BC$, $\triangle AN'N \sim \triangle ABC$, deci $\frac{AN'}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Folosind (7) obținem $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, deci $AM \cdot AC = AN \cdot AB$.

**VII.G.73.** Fie $ABC$ un triunghi avînd unghiurile $B$ și $C$ ascuțite.

METODA 1. (Vezi fig. VII.G.73. a)

Fie $ME \parallel AC$, $M \in BC$. Deoarece $AB \parallel EC$, $\triangle ABD \sim \triangle ECD$. Rezultă că $\frac{DE}{AD} = \frac{DC}{DB} = \frac{1}{2}$. $\triangle ACD \sim \triangle EMD$. Rezultă că $\frac{MD}{DC} = \frac{DE}{AD}$.

Adică $MD = \frac{1}{2} \cdot CD$. (1)

Dar $CD = \frac{1}{3} \cdot BC$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $MD = \frac{1}{6} \cdot BC$, deci $MC = \frac{1}{2} \cdot BC$, adică $M$ este mijlocul segmentului $BC$.

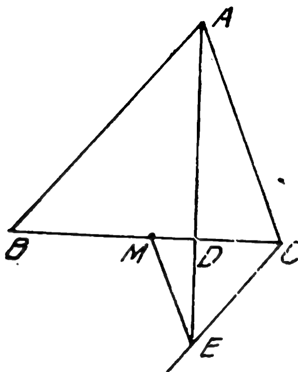


*Fig. VII.G.73.a.*

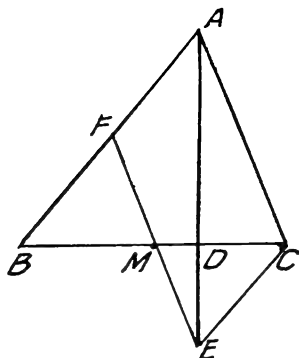


*Fig. VII.G.73.b.*

METODA 2. (Vezi fig. VII.G.73. b)

Fie $M$, $F$ punctele în care paralela prin $E$ la dreapta $AC$ intersectează $BC$, respectiv $AB$. Deoarece $CE \parallel AF$, $EF \parallel AC$, $AFEC$ este para-

lelogram. Rezultă că $CE = AF$. Dar $\triangle CDE \sim \triangle BDA$ de unde rezultă $EC = \frac{1}{2} \cdot AB$.

Deci $EC = BF$. (3)

Dar $EC \parallel BF$. (4)

Din (3) şi (4) rezultă că patrulaterul $BECF$ este paralelogram, cu diagonalele $BC$, $FE$. Rezultă că $BM = MC$, adică $MC = \frac{1}{2} \cdot BC$.

METODA 3. (Vezi fig. VII.G.73. c.)

Fie $M$, $F$ punctele în care paralela prin $E$ la dreapta $AC$ intersectează $BC$, respectiv $AB$. Patrulaterul $AFEC$ este paralelogram.

Rezultă că $AF = EC$. (5)

Construim din $F$ perpendiculara pe dreapta $BC$. Fie $G$ şi $H$ punctele în care această perpendiculară intersectează dreapta $BC$, respectiv dreapta $EC$. Din construcţie rezultă că $FH \parallel AE$. Dar $AF \parallel HE$, deci patrulaterul $FHEA$ este paralelogram.

Rezultă că $AF = EH$.

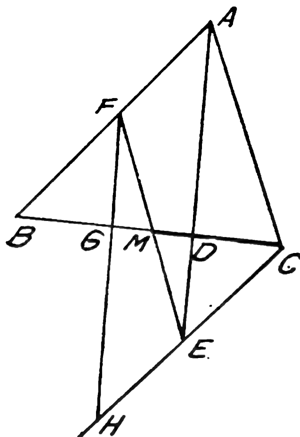



*Fig. VII.G.73.c.*

Din (5) şi (6) obţinem că $EH = EC$. Dar $EF \parallel AC$. Rezultă că segmentul $EF$ este linie mijlocie în paralelogramul $ACHB$, deci taie diagonala $BC$ la mijlocul ei.

Observația 1. Punctul $M$ este centrul de simetrie al figurii.

Observația 2. Dacă $\widehat{B}$ sau $\widehat{C}$ sînt obtuze, concluzia nu mai are loc. (Paralela prin $E$ la $AC$ trece prin mijlocul segmentului $CD$. (Vezi fig. VII.G.73. d)).

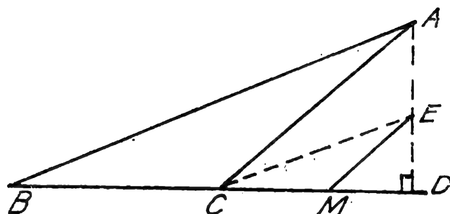



*Fig. VII.G.73.d.*

**VII.G.74.** Fie $G$ intersecția segmentelor $AD$ și $EF$. (Vezi fig. VII.G.74.)

a) Deoarece $EG \parallel BD$, rezultă că $\triangle AEG \sim \triangle ABD$. Deci :

$$\frac{EG}{BD}=\frac{AG}{AD}. \qquad (1)$$

Analog $\triangle AGF \sim \triangle ADC$, deci :

$$\frac{FG}{CD}=\frac{AG}{AD} \qquad (2)$$

Din (1) și (2), cum $BD = CD$, rezultă că $EG = GF$, deci dreapta $DG$ este mediană în triunghiul dreptunghic $EDF$. Deci : $DG=\frac{1}{2}\cdot EF$. Înlocuind în (1), $BC = a$, $AD = m$ obținem $\frac{2EG}{a}=\frac{m-EG}{m}$, de unde :

$EG=\frac{am}{a+2m}$.

deci :

$$EF=\frac{2am}{a+2m}. \qquad (3)$$

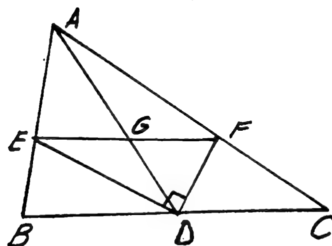



*Fig. VII.G.74.*

b) Deoarece $G$ este centrul de greutate al triunghiului $ABC$,

$$GD = \frac{1}{3} \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot m. \qquad (4)$$

Dar $GD = \frac{1}{2} \cdot EF$. Înlocuind $EF$ şi $GD$ din relaţiile (3) şi (4) obţinem : $\frac{am}{a+2m} = \frac{1}{3} m$. Împărţind în ambii membri prin $m \neq 0$, rezultă : $\frac{a}{a+2m} = \frac{1}{3}$, de unde $a = m$.

**VII.G.75.** a) (Vezi fig. VII.G.75. a.) Avem $m(\widehat{MDN}) = 45° + 45° = 90°$ ; $m(\widehat{MAN}) = 90°$. Rezultă că patrulaterul $AMDN$ este inscriptibil. Deci :

$$\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle MNA, \qquad (1)$$

$$\sphericalangle ADN \equiv \sphericalangle NMA. \qquad (2)$$

Dar $\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle ADN$, deci din (1) şi (2) rezultă că $\sphericalangle AMN \equiv \equiv \sphericalangle ANM$, adică triunghiul $AMN$ este isoscel, deci $AM = AN$.

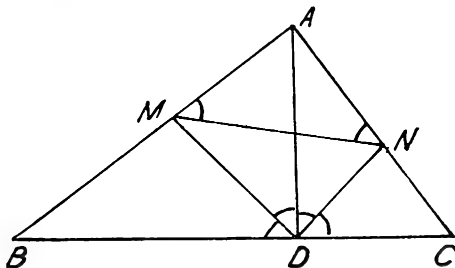


*Fig. VII.G.75.a.*

b) Deoarece $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle MND$, triunghiurile dreptunghice $ABD$ şi $NDM$ sînt asemenea. Rezultă că $\frac{BD}{MD} = \frac{AD}{DN}$. Deci $BD \cdot DN = AD \cdot DM$.

Analog, $\sphericalangle MND \equiv \sphericalangle DCA$ (avînd acelaşi complement), iar $\sphericalangle ADC$ şi $\sphericalangle MND$ sînt drepte. Rezultă că $\triangle ACD \sim \triangle MND$. Deci : $\frac{AD}{DM} = \frac{CD}{DN}$, de unde $AD \cdot DN = CD \cdot DM$.

c) Fie $E$ punctul de intersecţie al cercului circumscris triunghiului $ADM$ cu ipotenuza $BC$. (Vezi fig. VII.G.75.b.). Punctele $A, M, D, E, N$ sînt conciclice. (Patrulaterul $AMDN$ este inscriptibil.)

Centrul cercului este mijlocul segmentului $MN$. (3)

Deoarece $m(\widehat{ADE}) = 90°$, $AE$ este diametru în cerc. (4)

Din (3) şi (4) rezultă că $AE$ este mediană în triunghiul isoscel $AMN$, deci $AE$ e bisectoarea unghiului $BAC$.

În patrulaterul $AMEN$, diagonalele sînt congruente şi se taie în părţi congruente, iar $AM = AN$. Rezultă că $AMEN$ este dreptunghi şi romb în acelaşi timp, deci este pătrat.

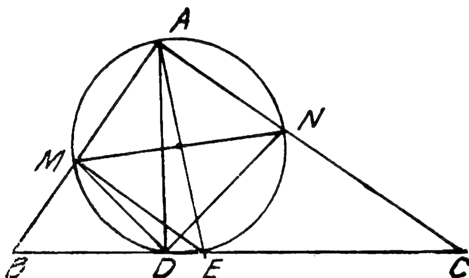



*Fig. VII.G.75.b.*

**VII.G.76.** Fie $ABC$ un triunghi ascuţitunghic. (Vezi fig. VII.G.76.).

a) Centrul cercului circumscris triunghiului $ACD$ este $M$. Deoarece $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{ADC}) = 90°$ rezultă că $E \in C(M, AM)$, deci punctele $A$, $C$, $D$, $E$ sînt conciclice.

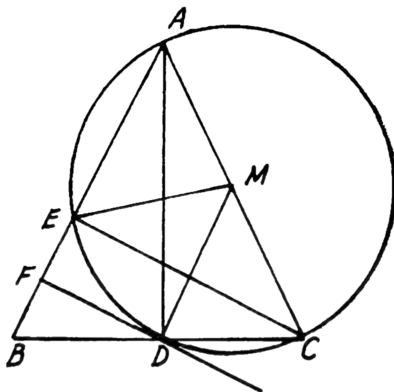



*Fig. VII.G.76.*

b) Triunghiurile $ADC$ şi $AEC$ sînt dreptunghice ; $DM$, respectiv $EM$ sînt mediane corespunzătoare ipotenuzei $AC$. Rezultă că :

$$DM = \frac{AC}{2},\ EM = \frac{AC}{2},$$

deci triunghiul $MED$ este isoscel.

c) Triunghiul $ABC$ este isoscel, deci înălţimea $AD$ este şi bisectoare. Rezultă $\overset{\frown}{ED} \equiv \overset{\frown}{CD}$. Deci şi $\sphericalangle DMC \equiv \sphericalangle DME$. Rezultă că $MD$ este bisectoare în triunghiul isoscel $EMC$. Deci $MD$ este mediatoarea segmentului $CE$.

d) Avem : $MD \perp FD$, $MD \perp EC$. Rezultă că $EC \parallel FD$. Dar $EC \perp \perp AB$. Deci $FD \perp AB$.

e) Deoarece $m(\widehat{AFD}) = 90° = m(\widehat{ADC})$ şi $\sphericalangle FAD \equiv \sphericalangle CAD$, rezultă că $\triangle AFD \sim \triangle ADC$, deci $\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AC}$, adică $AD^2 = AF \cdot AC$.

Cazul în care triunghiul $ABC$ este obtuzunghic se tratează analog.

**VII.G.77.** a) (Vezi fig. VII.G.77.) $AG$ este mediană în triunghiul dreptunghic $BAE$. Rezultă că

$$AG = \frac{BE}{2}. \tag{1}$$

$DG$ este mediană în triunghiul dreptunghic $BDE$. Rezultă că

$$DG = \frac{BE}{2}. \tag{2}$$

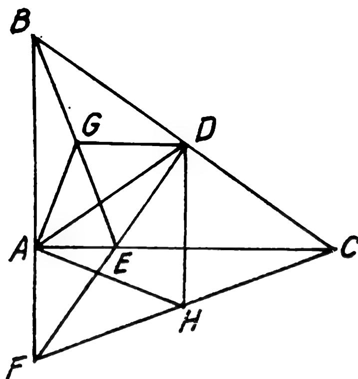



*Fig. VII.G.77.*

Din (1) şi (2) obţinem $AG = DG$, deci triunghiul $ADG$ este isoscel. Analog în triunghiurile dreptunghice $AFC$ şi $DFC$, $AH$ şi $DH$ sînt mediane de lungime $\frac{CF}{2}$. Rezultă că triunghiul $AHD$ este isoscel.

b) Deoarece $m(\widehat{BAE}) = 90°$, $m(\widehat{BDE}) = 90°$, $BAED$ este inscriptibil. Centrul cercului circumscris acestui patrulater este $G$.

c) Deoarece patrulaterele *AEDB* și *AFCD* sînt inscriptibile, avem :

$$\sphericalangle DBE \equiv \sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle DFC,$$

$$\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle DCF.$$

Rezultă că $\triangle BDE \sim \triangle FDC$. Deci :

$\dfrac{BD}{FD}=\dfrac{DE}{CD}$, adică $BD \cdot CD = FD \cdot DE$. (3)

Dar $BD = CD = \dfrac{BC}{2}$ Înlocuind în (3) obținem $\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = FD \cdot DE$, $BC^2 = 4FD \cdot DE$.

d) Deoarece *AC* și *FD* sînt înălțimi în triunghiul *BCF*, *E* este ortocentrul triunghiului *BCF*. Rezultă că $BE \perp FC$.

**VII.G.78.** a) (Vezi fig. VII.G.78.) Deoarece $\sphericalangle AMC$ și $\sphericalangle ABC$ sînt unghiuri înscrise în semicerc, $m(\widehat{AMC}) = 90°$, $m(\widehat{ABC}) = 90°$. Rezultă că și suplementele lor, *EMF* și *EBF*, au măsurile de 90°, deci patrulaterul *BEMF* este inscriptibil.

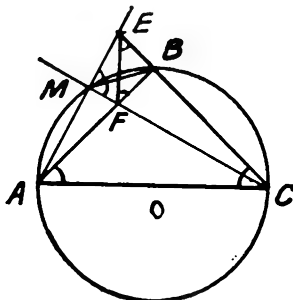



*Fig. VII.G.78.*

b) Deoarece patrulaterele *BEMF* și *MACB* sînt inscriptibile avem următoarele congruențe de unghiuri : $\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle BMF \equiv \sphericalangle BAC \equiv \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BME \equiv \sphericalangle EFB$. Deci $\sphericalangle BEF \equiv \sphericalangle EFB$, deci triunghiul *EBF* este isoscel.

c) Fie *H* intersecția dreptelor *EF* și *AC*. Avem $m(\widehat{AFH}) = m(\widehat{EFB}) = 45°$, $m(\widehat{FAH}) = 45°$. Rezultă că $m(\widehat{AHF}) = 90°$, deci $EF \perp AC$.

Altfel Observăm că *F* este ortocentrul triunghiului *ACE*.

d) $\triangle MFB \sim \triangle AFC$ (U.U.). Rezultă că $\dfrac{MF}{AF}=\dfrac{FB}{FC}$, deci $AF \cdot FB = MF \cdot FC$.

e) Deoarece $m(\widehat{FMA}) = m(\widehat{EBF}) = 90°$, iar $\sphericalangle MAF \equiv \sphericalangle EAB$, rezultă că $\triangle AMF \sim \triangle ABE$. (În acest caz, dreapta *MF* se numește antiparalelă la dreapta *EB* în raport cu laturile unghiului *EAB*).

**VII.G.79.** Fie $S$ intersecţia dreptelor $EF$ şi $AC$. (Vezi fig. VII.G.79.) Deoarece $DC \parallel AB$ rezultă că $\triangle ECD \sim \triangle EBA$. Deci :

$$\frac{ED}{EA}=\frac{CD}{AB}=\frac{2}{3}.$$

Rezultă că $ED = 2AD$. Deci $ED = CD$ ; dar $DF = AD$, $m(\widehat{EDF}) = m(\widehat{CDA}) = 90°$. Rezultă că $\triangle EDF \equiv \triangle CDA$ (C.C.). Deci $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle FCS$. Dar $\sphericalangle EFD \equiv \sphericalangle CFS$ (fiind unghiuri opuse la vîrf. Cum $\sphericalangle DEF$ şi $\sphericalangle EFD$ sînt complementare rezultă că $\sphericalangle FCS$ şi $\sphericalangle CFS$ sînt complementare. Deci $m(\widehat{FSC}) = 90°$. Deci $EF \perp AC$.

Altfel : Deoarece $AD = DF$, rezultă că triunghiul $ADF$ este isoscel. Fiind şi dreptunghic, $m(\widehat{FAB}) = 45°$. Cum şi $m(\widehat{ABE}) = 45°$, rezultă că $AF \perp BE$. Dar $CF \perp AE$. Deci $F$ este ortocentrul triunghiului $ACE$. Rezultă că $EF \perp AC$.

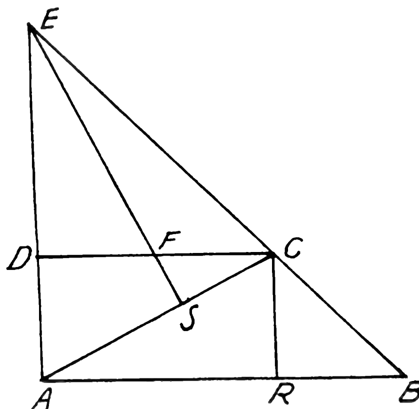



*Fig. VII.G.79.*

**VII.G.80.** a) (Vezi fig. VII.G.80.) Deoarece $AB \parallel CD$, rezultă că $\triangle ABN \sim \triangle CDN$. Deci :

$$\frac{b}{a}=\frac{BN}{ND}=\frac{AN}{NC}, \qquad (1)$$

de unde obţinem proporţia derivată : $\frac{b}{a}=\frac{BN - AN}{ND - NC}$. Sau : $b(ND - NC) = a(BN - AN)$ ; $b \cdot ND + a \cdot AN = a \cdot BN + b \cdot NC$.

b) Din (1) obţinem $\frac{b}{a}=\frac{b + BN + AN}{a + ND + NC}$ Dar $ND + NC = n - BN + m - AN$.

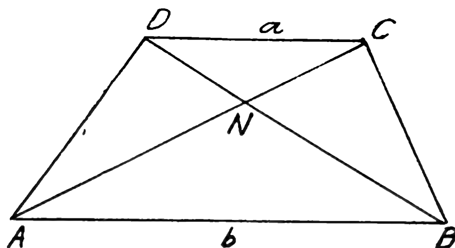



*Fig. VII.G.80.*

Deci :

$$\frac{b}{a}=\frac{b+BN+AN}{a+n+m-(BN+AN)},$$

$$b(a+n+m)-b(AN+BN)=ab+a(BN+AN),$$

de unde :

$$BN+AN=\frac{bn+bm}{a+b}.$$

Deci

$$b+BN+AN=\frac{bn+bm+ab+b^2}{a+b}.$$

Rezultă că

$$f(x)=\frac{2(6-x+2x+2+3+2)}{5}=\frac{2(x+13)}{5},\ x\in \mathbf{R}.$$

Cum $m$ şi $n$ sînt lungimile unor segmente, sînt strict pozitive.

Deci

$$\begin{cases} 2x+2>0 \\ 6-x>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-1 \\ x<6 \end{cases}$$

Rezultă $-1<x<6$, deci :

$$\frac{24}{5}<f(x)<\frac{38}{5}$$

Deci $f(x)\in\left(\frac{24}{5};\ \frac{38}{5}\right)=(4,8\ ;\ 7,6).$

**VII.G.81.** a) (Vezi fig. VII.G.81.) Avem :

$$OA=16,7(9)=16,8=\frac{84}{5};$$

$$OC=AC-OA=\frac{96}{5}-\frac{84}{5}=\frac{12}{5};$$

$$OB = DB - OD = 4 - 0{,}5 = 3{,}5 = \frac{7}{2};$$

$$OD = 0{,}5 = \frac{1}{2}.$$

Observăm că :

$$\frac{\frac{84}{5}}{\frac{12}{5}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{1}{2}}, \text{ deci se verifică proporția } \frac{AO}{OC} = \frac{BO}{OD} \qquad (1)$$

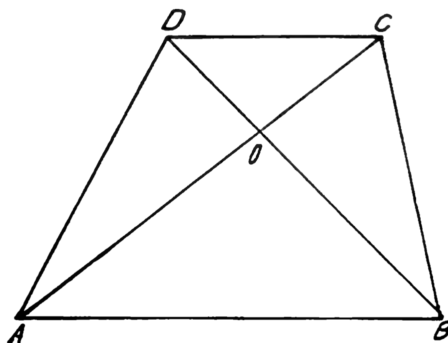



*Fig. VII.G.81.*

Unghiurile $AOB$ și $COD$ sînt opuse la vîrf, deci :

$$\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COD. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\triangle ABO \sim \triangle CDO$. Rezultă că $\sphericalangle BAO \equiv \sphericalangle OCD$, deci $AB \parallel CD$.

b) Raționăm prin reducere la absurd. Presupunem că $ABCD$ este inscriptibil. Rezultă că :

$$\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD. \qquad (3)$$

Dar $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BDC$. (4)

Din (3) și (4) rezultă că triunghiul $DOC$ este isoscel, deci $OD = OC$. Dar $OD = \frac{1}{2}$, $OC = \frac{12}{5}$. Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci patrulaterul $ABCD$ nu este inscriptibil. (Direct : Deoarece $AC = \frac{96}{5} \neq BD = 4$, trapezul nu este isoscel deci nici inscriptibil).

c) În triunghiul $COD$ avem următoarele relații : $|OC - OD| < CD < OC + OD$.

Înlocuind cu lungimile date, obținem : $1{,}9 < CD < 2{,}9$.

Deoarece $CD$ este un număr natural, rezultă $CD = 2$.

**VII.G.82.** a) (Vezi fig. VII.G.82.) Avem, din ipoteză : $AC = AB = AM$. Deci triunghiurile $ABC$ şi $ACM$ sînt isoscele. Notăm $\beta = m(\widehat{ACM})$, $\alpha = m(\widehat{ACB})$.

Avem $2\alpha + 2\beta = 180°$ Deci $\alpha + \beta = 90°$, adică $m(\widehat{BCM}) = 90°$.

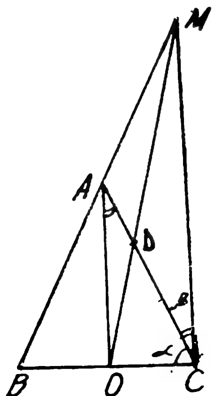



*Fig. VII.G.82.*

b) $AO$ este linie mijlocie în triunghiul $BMC$. Rezultă că $AO \parallel MC$, deci $\sphericalangle OAD \equiv \sphericalangle DCM$. (1)

Dar $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{2} = \frac{AO}{MC}$; (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\triangle AOD \sim \triangle CMD$ (L.U.L.).

c) Din faptul că $\triangle AOD \sim \triangle CMD$ rezultă că $\sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle CDM$. Deci semidreptele $DM$ şi $DO$ sînt în prelungire. Rezultă că $M$, $D$, $O$ sînt coliniare.

Altfel Deoarece $AC$ este mediană în triunghiul $BCM$ şi $AD = \frac{1}{3} \cdot AC$ ($D \in AC$), $D$ este centrul de greutate al triunghiului $BCM$. Deci dreapta $MD$ este mediană în triunghiul $BCM$, adică $M$, $D$, $O$ sînt coliniare.

**VII.G.83.** (Vezi fig. VII.G.83.) În triunghiurile dreptunghice $ADB$ şi $AEC$ avem :

$m(\widehat{ABD}) = 30°$, deci $AD = \frac{1}{2} \cdot AB$ ;

$m(\widehat{ACE}) = 30°$, deci $AE = \frac{1}{2} \cdot AC$ ;

$$\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle BAC.$$

Rezultă că $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (L.U.L.). Deci

$$ED = \frac{1}{2} \cdot BC. \quad (1)$$

Pe de altă parte, $OD$ este mediană în triunghiul dreptunghic $BDC$, deci :

$$OD = \frac{1}{2} \cdot BC. \quad (2)$$

La fel, $EO$ este mediană în triunghiul dreptunghic $BEC$, deci

$$EO = \frac{1}{2} \cdot BC. \quad (3)$$

Din (1), (2) și (3) rezultă că triunghiul $EOD$ este echilateral.

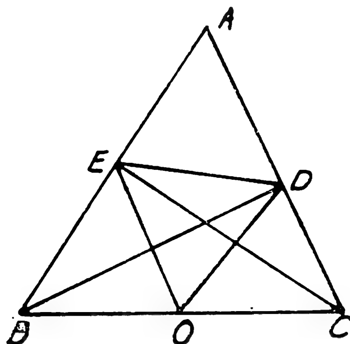



*Fig. VII.G.83.*

b) Din ipoteză rezultă că $B$ este un punct variabil pe dreapta $AB$. Din a) rezultă că $ED$ este minimă cînd $BC$ are cea mai mică lungime posibilă. $BC$ este minimă cînd reprezintă tocmai distanța de la C la dreapta $AB$, deci atunci cînd $BC \perp AB$. Rezultă, în acest caz, $m(\widehat{ACB}) = 30°$, deci $AB = 2$ cm și $BC = 2\sqrt{3}$ cm. Rezultă că $EO = OD = DE = \sqrt{3}$ cm.

**VII.G.84.** METODA 1 (Vezi fig. VII.G.84. a.)

Arătăm că triunghiurile $AOK$ și $EOK$ sînt asemenea. Avem $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle COB$, fiind alterne interne ; $m(\widehat{ACO}) = m(\widehat{OAK}) = \frac{m(\widehat{AE})}{2}$.

Rezultă că : $\sphericalangle EOK \equiv \sphericalangle OAK$, iar $\widehat{K}$ este unghi comun, deci : $\triangle AOK \sim \triangle OEK$ (U.U.).

Fig. VII.G.84.a.

Avem $\dfrac{AK}{OK} = \dfrac{OK}{EK}$, adică $OK^2 = AK \cdot EK$. (1)

Dar, din teorema puterii punctului $K$ față de cerc, avem :

$KB^2 = EK \cdot AK$. (2)

Din (1) și (2) rezultă $OK^2 = BK^2$, deci, fiind numere pozitive, $OK = BK$.

METODA 2 (Vezi fig. VII.G.84. b.) :

Fie $D$ punctul de intersecție al diametrului ce trece prin $B$ cu dreapta $OA$. $BD$ este mediatoarea segmentului $AC$. Rezultă că $AD = CD$. Dar $AD$ este tangentă la cerc ; rezultă că și $CD$ este tangentă la cerc.

Fig. VII.G.84.b.

Notăm $\{F\} = CD \cap OB$. Se arată ușor că $BD$ este mediatoarea segmentului $OF$. Rezultă că triunghiul $DOF$ este isoscel, deci $\sphericalangle DFO \equiv \sphericalangle DOF$. Rezultă că $OA = OB = BF = FC$. În triunghiurile $OAK$ și $FOC$ avem: $\sphericalangle AOK \equiv \sphericalangle CFO$ și $\sphericalangle OAK \equiv \sphericalangle COF$. Rezultă că $\triangle OAK \sim \triangle FOC$.

Deci: $\frac{OK}{CF} = \frac{OA}{OF} = \frac{1}{2}$ și, în consecință, $OK = \frac{1}{2} \cdot OB = BK$.

**VII.G.85.** (Vezi fig. VII.G.85.) a) $\sphericalangle ATQ \equiv \sphericalangle TLQ$, deoarece ambele subîntind arcul $TQ$. (1)

Dar $LT \parallel AS$, deci:

$$\sphericalangle TLQ \equiv \sphericalangle LAS \equiv \sphericalangle MAQ. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle MAQ \equiv \sphericalangle ATQ$.

b) Fie $N$ intersecția dreptelor $TQ$ și $AS$. Avem $\triangle NAQ \sim \triangle NTA$ (U.U.). Deci $\frac{NA}{NT} = \frac{NQ}{NA}$, de unde

$$NA^2 = NT \cdot NQ. \quad (3)$$

Cum $m(\widehat{STQ}) = m(\widehat{QSN}) = \frac{m(\widehat{QS})}{2}$, iar $\widehat{TNS} \equiv \widehat{QNS}$, rezultă că $\triangle NSQ \sim \triangle NTS$.

Deci: $\frac{NS}{NT} = \frac{NQ}{NS}$. Rezultă că

$$NS^2 = NT \cdot NQ. \quad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $NA = NS$, deci $N$ și $M$ coincid. Rezultă că $T$, $Q$ și $M$ sînt coliniare.

*Fig. VII.G.85.*

**VII.G.86.** a) Fie $T$ pe $d_1$, în afara semidreptei $AM$. (Vezi fig. VII.G.86.a.)

Deoarece $d_1$ este tangentă la $C(O_1, r_1)$, avem:

$$m(\widehat{TAD}) = \frac{m(\widehat{AD})}{2} = m(\widehat{ABD}). \quad (1)$$

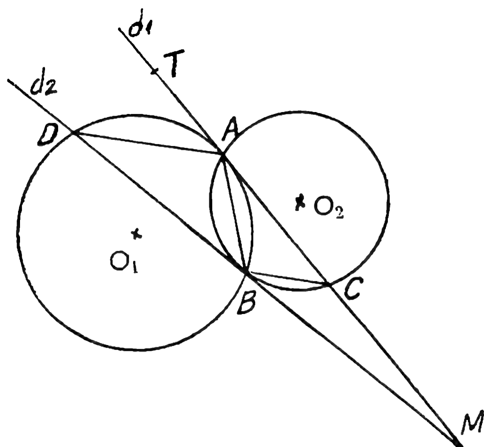



*Fig. VII.G.86.a.*

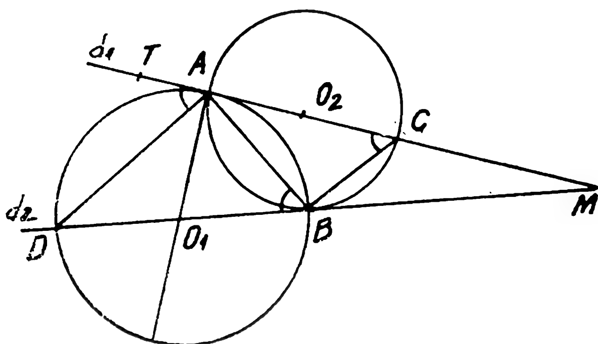



*Fig. VII.G.86.b.*

Dar $d_2$ este tangentă la $C$ $(O_2, r_2)$ în $B$, deci

$$m(\widehat{ABD}) = \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\widehat{ACB}). \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\sphericalangle TAD \equiv \sphericalangle ACB$.
Unghiurile $TAD$ şi $ACB$ fiind corespondente, rezultă că $BC \parallel AD$.

Altfel :

Conform teoremei puterii punctului $M$ faţă de cele două cercuri, obţinem $MA^2 = MB \cdot MD$, $MB^2 = MC \cdot MA$.

Înmulţind cele două relaţii, rezultă $MA \quad MB = MC \quad MD$. Adică: $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB}$. Conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $BC \parallel AD$.

b) Avem: $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle BDA$ şi $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ABD$. Rezultă că $\triangle ABC \sim \triangle DAB$. Deci: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{AB}$, adică $AB^2 = AD \cdot BC$.

c) Fie $O_2 \in d_1$. Arătăm că punctele $B$, $O_1$, $D$ sînt coliniare. (Vezi fig. VII.G.86. b.) Avem $\sphericalangle DAO_1 \equiv \sphericalangle BAO_2$, fiind unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare. Obţinem:

$$m(\widehat{DAO_1}) + m(\widehat{ADO_1}) = m(\widehat{BAO_2}) + \frac{m(\widehat{AB})}{2} = \frac{m(\widehat{AB})}{2} + \frac{m(\widehat{AB})}{2} = m(\widehat{AB}).$$

($\widehat{AB} \subset C(O_1, r_1)$).

Dar $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{AO_1B})$.

Rezultă că $m(\widehat{DAO_1}) + m(\widehat{ADO_1}) = m(\widehat{AO_1B})$, deci $\sphericalangle AO_1B$ este unghi exterior triunghiului $ADO_1$. Deci punctele $B$, $O_1$, $D$ sînt coliniare, adică $O_1$ aparţine dreptei $d_2$.

**VII.G.87.** (Vezi fig. VII.G.87.) a) Triunghiurile $QDN$ şi $RBA$ sînt dreptunghice avînd $m(\widehat{QDN}) = 90°$, $m(\widehat{RBA}) = 90°$; $m(\widehat{RNB}) = m(\widehat{RAB}) = \frac{m(\widehat{BR})}{2}$. Rezultă că $\sphericalangle ARB \equiv \sphericalangle NQA$, avînd complemente congruente.

Deoarece $\sphericalangle AMR$ este înscris într-un semicerc, $m(\widehat{AMR}) = 90°$; deci $MR \perp AQ$. Dar $BN \perp AQ$, deci $MR \parallel BN$. Rezultă că $NRMB$ este trapez şi, fiind inscriptibil, este isoscel.

Avem: $m(\widehat{BDA}) = m(\widehat{ANR}) = 90°$ ($BD \perp AD$, $AR$ diametru); **(1)**

$m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{ARN}) = \frac{m(\widehat{AN})}{2}$. **(2)**

Din (1) şi (2) rezultă că $\triangle ANR \sim \triangle ADB$ (U.U.).

b) Dacă $AN \parallel BP$, atunci patrulaterul $BANM$ este trapez isoscel. Rezultă că $\sphericalangle DBM \equiv \sphericalangle DMB$.

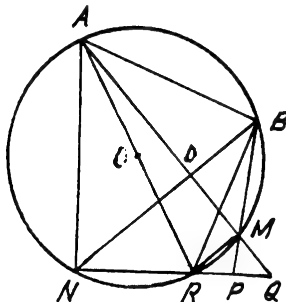


*Fig. VII.G.87.*

Dar triunghiul $BDM$ este dreptunghic, deci $m(\widehat{BMD}) = 45°$, deci $m(\widehat{AB}) = 90°$ şi $m(\widehat{AOB}) = 90°$.

c) Dacă triunghiul $NBP$ este echilateral, atunci $m(\widehat{BNR}) = 60°$. Dar $m(\widehat{BAO}) = \frac{m(\widehat{BMR})}{2} = m(\widehat{BNR}) = 60°$. Rezultă că triunghiul $AOB$, fiind isoscel cu un unghi de 60°, este echilateral, deci $AB = AO$. Din a) rezultă că $m(\widehat{QMR}) = 90°$ şi că, în triunghiul dreptunghic $QMR$, $MP$ este mediană, deci:

$$MP = QP = PR. \tag{3}$$

Avem $m(\widehat{MPR}) = 60°$ şi din (3) rezultă că triunghiul $MPR$ este echilateral, deci $MR = MP$.

**VII.G.88.** Problema admite mai multe soluţii, depinzînd de aşezarea punctelor $B_1$, $C_1$, respectiv $B_2$, $C_2$ pe dreapta $a_1$ respectiv $a_2$. Pentru claritatea şi conciziunea rezolvării facem următoarea convenţie : ataşăm figurii un sistem de coordonate avînd originea $A_1$, abscisa $a_1$ şi ordonata $e$. Fixăm ca unitate de măsură pe axe 1 cm.

Fie $P$ respectiv $Q$ intersecţiile dreptei $MN$ cu $B_1C_2$ şi $C_1B_2$. Notăm respectiv cu $a$, $b$, $c$, $d$ abscisele punctelor$B_1$, $C_1$, $B_2$, $C_2$. Punctele $B_1$, $C_1$, $B_2$, $C_2$ sînt vîrfurile unui trapez. Conform unei probleme anterioare (66), avem :

$$PQ = \frac{2B_1C_1 \cdot B_2C_2}{B_1C_1 + B_2C_2} = \frac{2\,|a-b|\cdot|c-d|}{|a-b|+|c-d|} \tag{1}$$

În triunghiul $C_2B_1C_1$, conform teoremei fundamentale a asemănării avem

$$\frac{PM}{B_1C_1} = \frac{C_2M}{C_1C_2} \tag{2}$$

Din teorema lui Thales obţinem

$$\frac{C_2M}{C_1C_2} = \frac{A_2N}{A_1A_2}. \tag{3}$$

$$\text{Dar } PM = MQ = \frac{PQ}{2}. \tag{4}$$

Din (2), (3) şi (4) rezultă

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{PQ}{B_1C_1} = \frac{A_2N}{A_1A_2}$$

Înlocuind cu (1) :

$$\frac{A_2N}{A_1A_2} = \frac{|a-b|\cdot|c-d|}{(|a-b|+|c-d|)\cdot|a-b|} = \frac{|c-d|}{|a-b|+|c-d|}$$

Cum $A_1A_2 = 1$, rezultă

$$A_2N = \frac{|c-d|}{|a-b|+|c-d|};$$

$$A_1N = 1 - \frac{|c-d|}{|a-b|+|c-d|} = \frac{|a-b|}{|a-b|+|c-d|}$$

Fie $R$ intersecţia dreptelor $A_2B_1$ şi $MN$. Avem, aplicînd teorema fundamentală a asemănării, apoi teorema lui Thales:

$$\frac{RP}{A_2C_2}=\frac{RB_1}{B_1A_2}=\frac{A_1N}{A_1A_2},$$

de unde $RP=A_2C_2\cdot A_1N$.

Deci

$$RP=\frac{d\cdot|a-b|}{|a-b|+|c-d|}.$$

Analog,

$$\frac{NR}{A_1B_1}=\frac{A_2N}{A_1A_2},$$

de unde $NR=A_1B_1\cdot A_2N$. Deci

$$NR=\frac{a\cdot|c-d|}{|a-b|+|c-d|}$$

Rezultă,

$$NP=NR+RP=\frac{a\cdot|c-d|+d\cdot|a-b|}{|a-b|+|c-d|}$$

Cum $MP=\frac{|a-b|\cdot|c-d|}{|a-b|+|c-d|}$, avem

$$MN=MP+NP=\frac{|a-b|\cdot|c-d|+a\cdot|c-d|+d\cdot|a-b|}{|a-b|+|c-d|}.$$

Particularizînd, obţinem:

1) $B_1$ între $A_1$ şi $C_1$; $C_2$ între $A_2$ şi $B_2$. (Vezi fig. VII.G.88.a.)

$$A_1N=\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}=0{,}625.$$

$$MN=\frac{2\cdot3+3\cdot5+5\cdot3}{5+3}=\frac{36}{8}=4{,}5.$$

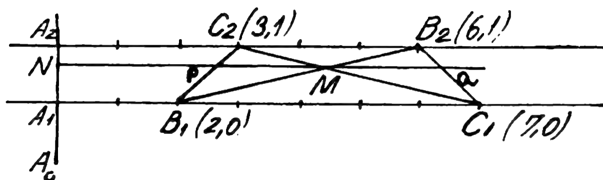



Fig. VII.G.88.a.

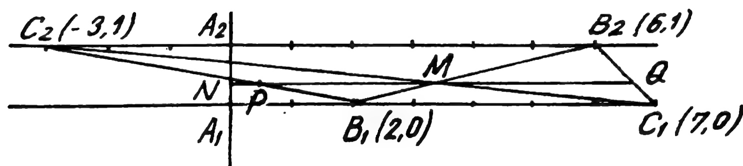



Fig. VII.G.88.b.

2) $B_1$ între $A_1$ şi $C_1$ ; $A_2$ între $B_2$ şi $C_2$. (Vezi fig. VII.G.88.b.)

$$A_1N = \frac{5}{5+9} = \frac{5}{14}.$$

$$MN = \frac{2\cdot 9 + 5\cdot 9 - 3\cdot 5}{5+9} = \frac{48}{14} = \frac{24}{7}$$

3) $A_1$ între $B_1$ şi $C_1$ ; $A_2$ între $B_2$ şi $C_2$. (Vezi fig. VII.G.88.c.)

$$A_1N = \frac{9}{9+9} = \frac{9}{18} = 0{,}5.$$

$$MN = \frac{9\cdot 9 - 2\cdot 9 - 3\cdot 9}{9+9} = 2.$$

Observăm că $B_1C_1 = B_2C_2$, deci figura $B_1C_1B_2C_2$ este paralelogram. Aceeaşi soluţie obţinem pentru ordinea : $C_1$, $A_1$, $B_1$ ; $B_2$, $A_2$, $C_2$.

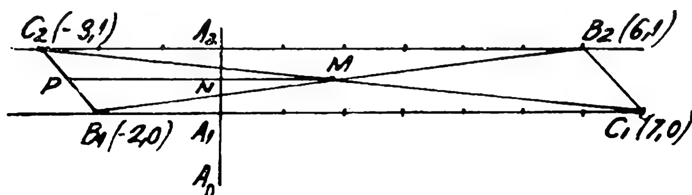



*Fig. VII.G.88.c.*

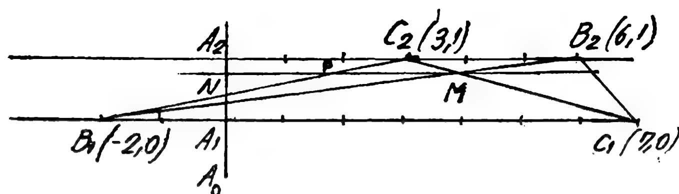



*Fig. VII.G.88.d.*

4) $A_1$ între $B_1$ şi $C_1$ ; $C_2$ între $A_2$ şi $B_2$. (Vezi fig. VII.G.88.d.)

$$A_1N = \frac{9}{9+3} = \frac{9}{12} = 0{,}75.$$

$$MN = \frac{3\cdot 9 - 2\cdot 3 + 9\cdot 3}{9+3} = \frac{16}{4} = 4.$$

Situaţiile în care $B_2$ şi $C_1$ sînt separate de dreapta $e$, nu sînt soluţii ale problemei, deoarece, în aceste cazuri, segmentele $B_1B_2$ şi $C_1C_2$ nu se intersectează.

**VII.G.89.** Demonstrăm mai întîi următoarea lemă : Dreapta determinată de punctul de intersecție al laturilor neparalele ale unui trapez și de punctul de intersecție a diagonalelor trapezului trece prin mijlocul fiecărei baze.

Demonstrație : (Vezi fig. VII.G.89. a.)

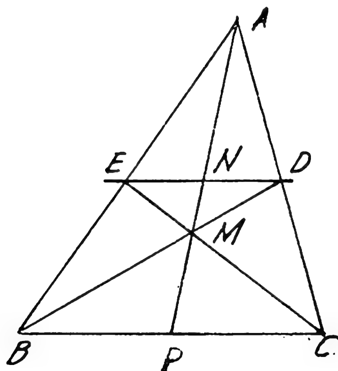



*Fig. VII.G.89.a.*

Fie $EBCD$ un trapez, astfel încît laturile neparalele $BE$ și $CD$ se intersectează în $A$, iar diagonalele $BD$ și $EC$ în $M$. Fie $N$ și $P$ intersecțiile dreptei $AM$ cu $ED$, respectiv $BC$.

Avem $\triangle NMD \sim \triangle PMB$ (U.U.).

Rezultă că $\frac{ND}{BP}=\frac{MN}{MP}$. (1)

Analog $\triangle NME \sim \triangle PMC$ (U.U.).

Rezultă că $\frac{EN}{CP}=\frac{MN}{MP}$. (2)

Pe de altă parte, din asemănarea triunghiurilor $AND$ și $APC$ ; $AEN$ și $ABP$ ; $AED$ și $ABC$ avem următoarele proporții :

$$\frac{ND}{PC}=\frac{AD}{AC};\ \frac{EN}{BP}=\frac{AE}{AB};\ \frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}.$$

Rezultă că :

$$\frac{ND}{PC}=\frac{EN}{BP}. \quad (3)$$

Din (1) și (2) rezultă că $\frac{PC}{EN}=\frac{PB}{ND}$.

Înmulțind această relație cu (3) în mod convenabil, rezultă

$\frac{ND}{EN}=\frac{EN}{ND}$, deci $ND=EN$ și $\frac{PC}{PB}=\frac{PB}{PC}$, deci $PB=PC$.

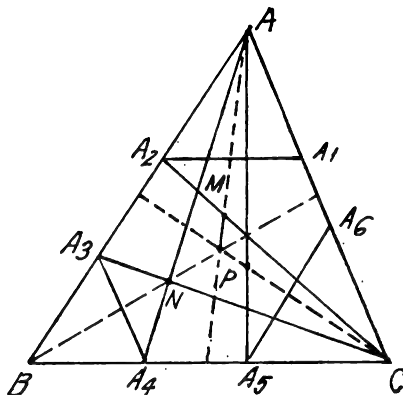



*Fig. VII.G.89.b.*

(Segmentul determinat de mijloacele laturilor opuse ale unui patrulater se numeşte bimediană în patrulater).

SOLUŢIA PROBLEMEI

Observăm că, în trapezul $A_2BCA_1$, dreapta $AM$ trece prin punctul de intersecţie a diagonalelor. Conform lemei, dreapta $AM$ este mediană în triunghiul $ABC$. Analog, dreapta $BN$ este mediană în triunghiul $ABC$ şi dreapta $CP$ este mediană în triunghiul $ABC$. Din teorema de concurenţă a medianelor oricărui triunghi, rezultă că dreptele $AM$, $BN$ şi $CP$ sînt concurente în centrul de greutate al triunghiului $ABC$.

**VII.G.90.** Avem de demonstrat că, în ipotezele problemei, $OQ \parallel BC$ dacă şi numai dacă $MQ = MP$. Fie E intersecţia laturilor neparalele ale trapezului. Condiţia necesară : („$\Rightarrow$").

Deoarece $OQ \parallel BC$, rezultă că $\triangle MOQ \sim \triangle MEB$, deci

$$\frac{MQ}{MB} = \frac{MO}{ME}. \quad (1)$$

Deoarece $OP \parallel AD$, rezultă că $\triangle MOP \sim \triangle MEA$, deci

$$\frac{MP}{MA} = \frac{MO}{ME}. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{MQ}{MB} = \frac{MP}{MA}$. (3)

Dar dreapta $EM$ este mediană în triunghiul $EAB$ (vezi problema 89), deci $MB = MA$. (4)

Din (3) şi (4) rezultă că $MP = MQ$.

Condiţia suficientă : („$\Leftarrow$").

Avem $PM = MQ$, $MA = MB$. Rezultă că $\frac{MP}{MA} = \frac{MQ}{MB}$. (5)

Deoarece $OP \parallel AE$, avem $\frac{MP}{MA} = \frac{MO}{ME}$. (6)

Fig. VII.G.90.

Din (5) și (6) rezultă că $\frac{MQ}{MB} = \frac{MO}{ME}$. Conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $OQ \parallel BC$.

**VII.G.91.** CAZUL I.

Punctele $D$ și $E$ sînt situate astfel încît $D$ să fie între $B$ și $E$. (Vezi fig. VII.G.91.)

Fig. VII.G.91.

METODA 1

Fie $R$ intersecția dreptelor $AD$ și $EF$, iar $S$ intersecția dreptelor $AE$ și $DG$.

Deoarece $m(\widehat{AFR}) = m(\widehat{AGS}) = 90°$, $AF = AG$, $\sphericalangle FAR \equiv \sphericalangle GAS$, obținem că $\triangle FAR \equiv \triangle GAS$ (C.U.). (1)

Rezultă că $\sphericalangle FRA \equiv \sphericalangle GSA$. Deci $\sphericalangle DRE \equiv \sphericalangle ESD$, fiind unghiuri opuse la vîrf unghiurilor $FRA$, respectiv $GSA$. Deci patrulaterul $RDES$ este inscriptibil. (2)

$\triangle FAM \equiv \triangle GAM$ (I.C.). (3)

Din (1) și (3) rezultă că $\triangle ARM \equiv \triangle ASM$ (L.L.L.). Deci $RM = SM$, adică triunghiul $RMS$ este isoscel. Deci $\sphericalangle MRS \equiv \sphericalangle MSR$. Conform (2), rezultă că $\sphericalangle SDE \equiv \sphericalangle ERS \equiv \sphericalangle DSR$, deci $DE \parallel RS$. (4)

Din (2) și (4) rezultă că $RDES$ este trapez isoscel. Deci $RD = ES$, de unde rezultă $AD = AE$, fiind sume de segmente congruente. (5)

Avem $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC$, avînd suplementele congruente. (6)

Din ipoteză, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$. (7)

Din (5), (6) și (7) rezultă că $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ (U.L.U.). Rezultă că $AB = AC$, deci triunghiul $ABC$ este isoscel.

b) Deoarece $\triangle ARM \equiv \triangle ASM$, $AM$ este bisectoare și înălțime în triunghiul $ARS$. Deci $AM \perp RS$. (8)

Din (4) și (8) rezultă că $AM \perp BC$.

Altfel : $RDES$ este trapez. Cum într-un trapez, dreapta determinată de punctul de intersecție al laturilor neparalele și punctul de intersecție al diagonalelor trece prin mijloacele bazelor, rezultă că dreapta $AM$ este mediană în triunghiul isoscel $ADE$. Deci $AM \perp BC$.

METODA 2.

a) $\triangle AFE \equiv \triangle AGD$ (C.U.). Rezultă că :

$$FE = DG\ ; \quad (9)$$

$$AD = AE\ ; \quad (10)$$

$$\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle AEM. \quad (11)$$

Din (10) rezultă că triunghiul $ADE$ este isoscel, deci

$$\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AED. \quad (12)$$

Din (11) și (12) obținem :

$$\sphericalangle FEB \equiv \sphericalangle MED \equiv \sphericalangle MDE \equiv \sphericalangle GDC. \quad (13)$$

Din (9) și (13) rezultă că $\triangle FEB \equiv \triangle GDC$ (C.U.).

Rezultă că $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$, deci triunghiul $ABC$ este isoscel.

b) În triunghiul isoscel $ADE$ dreapta $AM$ este bisectoare. Rezultă că dreapta $AM$ este și înălțime, deci $AM \perp BC$.

METODA 3 :

a) Triunghiul $FMG$ este isoscel ($\triangle FAM \equiv \triangle GAM$) (I.C.). Triunghiul $MDE$ este isoscel ($\triangle ADM \equiv \triangle AEM$, (U.L.U.)). Rezultă că

$$\frac{MD}{MG} = \frac{ME}{MF}$$

Conform reciprocei teoremei lui Thales, rezultă că $FG \parallel DE$. Deci $FG \parallel BC$. Deci : $\frac{AF}{AB} = \frac{AG}{AC}$ Dar cum $AF = AG$, rezultă $AB = AC$, deci triunghiul $ABC$ este isoscel.

b) $AM$ este bisectoare în triunghiul isoscel $AFG$, deci $AM \perp FG$. Dar $FG \parallel BC$ ; rezultă că $AM \perp BC$.

*Observație :* dreapta $AM$ este axă de simetrie a figurii.

CAZUL II

Punctele $D$ și $E$ sînt situate astfel încît $E$ este între $B$ și $D$. Demonstrația se face în mod analog.

**VII.G.92.** a) Fie $D$ intersecția dreptelor $OM$ și $LR$. (Vezi fig. VII.G.92.) În triunghiul $NMT$, $MD$ este bisectoare și înălțime, deci $NMT$ este triunghi isoscel. Rezultă :

$MN = MT$ ; (1)

$\sphericalangle BMN \equiv \sphericalangle AMT$, avînd complemente egale ; (2)

$BM = AM$, conform ipotezei. (3)

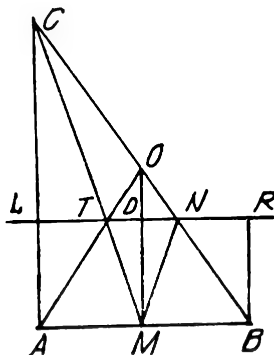



*Fig. VII.G.92.*

Din (1), (2) și (3) rezultă că $\triangle BMN \equiv \triangle AMT$ (L.U.L.). Rezultă că $BN = AT$ și cum $AB \parallel NT$, rezultă că $ABNT$ este trapez isoscel.

b) În triunghiul dreptunghic $ABC$, dreapta $AO$ este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci :

$$\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle OBA. \quad (4)$$

Dar, în trapezul isoscel $ATNB$,

$$\sphericalangle TAB \equiv \sphericalangle NBA. \quad (5)$$

Din (4) și (5), cum $O$, $N$, $B$ sînt coliniare, rezultă că $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle TAB$, deci dreptele $AT$ și $AO$ coincid. Rezultă că $A$, $T$, $O$ sînt coliniare.

c) Deoarece $LN \parallel AB$, $\triangle ABC \sim \triangle LNC$. (6)

Cum $MC$ este mediană în triunghiul $ABC$, din (6) rezultă că :

$TL = NT$. (7)

$\triangle BRN \equiv \triangle ALT$ (I.U.). Rezultă că :

$NR = TL$. (8)

Din (7) și (8) obținem $NR = TL = NT$.

*Observație :* toate proprietățile cerute rezultă ușor remarcînd că dreapta $MO$ este axă de simetrie a figurii.

**VII.G.93.** Fie $L, M, N, P$ intersecțiile dreptelor $OE, OF, OG, OH$ cu laturile $AB, BC, CD, DA$ (Vezi fig. VII.G.93.).

a) Deoarece în cercul de centru $O$, $OE \perp AB$, $OF \perp BC$, $OG \perp CD$, $OH \perp AD$, punctele $L, M, N, P$ sînt mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$. Deci :

Patrulaterul $LMNP$ este paralelogram. (1)

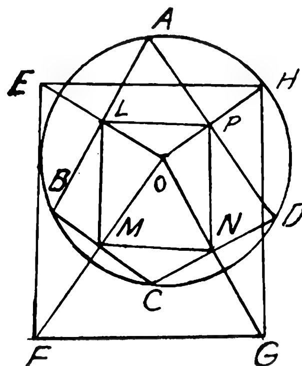



*Fig. VII.G.93.*

Deoarece $OL = EL$ și $OM = MF$, $LM$ este linie mijlocie în triunghiul $EOF$. Rezultă că

$LM \parallel EF$. (2)

Analog, rezultă că :

$MN \parallel FG$, $NP \parallel GH$, $LP \parallel EH$. (3)

Din (1), (2) și (3), conform tranzitivității relației de paralelism, rezultă că $EFGH$ este paralelogram.

b) Dacă $BD \perp AC$, atunci patrulaterul $LMNP$ este paralelogram cu un unghi drept, deci dreptunghi. Deci conform raționamentului de la a), $EFGH$ este dreptunghi.

Dacă $BD \perp AC$ și $BD \equiv AC$, atunci paralelogramul $LMNP$ este pătrat, deci $EFGH$ este pătrat și reciproc.

*Generalizare* Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru $O$ ; $L, M, N, P$ proiecţiile lui $O$ pe laturile $AB, BC, CD$, respectiv $DA$. Pe semidreptele $OL, OM, ON, OP$ se iau punctele $E, F, G$, respectiv $H$ astfel încît : $\frac{OL}{LE}=\frac{OM}{MF}=\frac{ON}{NG}=\frac{OP}{PH}$ Atunci $EFGH$ este paralelogram.

**VII.G.94.** a) Fie $M$ intersecţia dreptelor $BC$ şi $PS$, iar $R$ intersecţia dreptelor $CD$ şi $SH$. În triunghiul $PHS$, dreptele $SC$ şi $PC$ sînt înălţimi, deci $C$ este ortocentrul triunghiului $PSH$. Rezultă că dreapta $HC$ este înălţime, deci $BC \perp PS$.

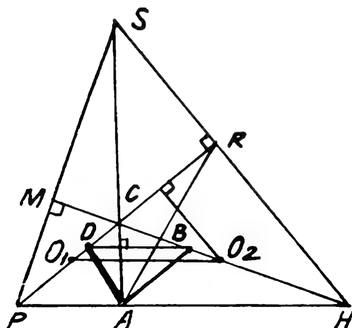



*Fig. VII.G.94.*

b) Punctele $O_1$ şi $O_2$ sînt respectiv mijloacele segmentelor $CP$ şi $CH$. Deci $O_1O_2$ este linie mijlocie în triunghiul $CPH$. Rezultă că $O_1O_2 \parallel PH$.

Dar $PH \parallel BD$. Conform tranzitivităţii relaţiei de paralelism a dreptelor, rezultă că $O_1O_2 \parallel BD$. Aplicînd teorema fundamentală a asemănării rezultă că $\triangle CO_1O_2 \sim \triangle CDB$, deci cele două triunghiuri au laturile respectiv proporţionale.

**VII.G.95.**

a) Fie $M$ cel de-al doilea punct de intersecţie al cercurilor circumscrise triunghiurilor $BCI$ şi $ACJ$. (Vezi fig. VII.G.95.) Rezultă că patrulaterele $AMCJ$ şi $BMCI$ sînt inscriptibile şi, ţinînd cont de triunghiurile asemenea date în enunţ, rezultă că :

$$\sphericalangle AMJ \equiv \sphericalangle ACJ \equiv \sphericalangle BCI \equiv \sphericalangle BMI \equiv \sphericalangle C' \equiv \sphericalangle AKB.$$

Deci patrulaterul $AKBM$ este inscriptibil şi deci $M$ este situat şi pe cercul circumscris triunghiului $ABK$.

b) Se demonstrează imediat folosind cele trei patrulatere inscriptibile găsite mai sus.

c) $AM$, $BM$ şi $CM$ sînt coarde comune perechilor de cîte două din cele trei cercuri. Rezultă că $UV \perp CM$, $VW \perp AM$, $UW \perp BM$. Notăm cu $N, P, Q$ intersecţiile liniilor centrelor cu coardele comune ($N \in AM$,

$P \in BM$, $Q \in CM$). Rezultă că patrulaterele $WPMN$, $VQMN$, $UPMQ$ sînt inscriptibile. Deci $m(\widehat{W}) = 180° - m(\widehat{PMN}) = m(\widehat{AKB}) = m(\widehat{C'})$.

Analog, arătăm că $\sphericalangle U \equiv \sphericalangle A'$ şi $\sphericalangle V \equiv \sphericalangle B'$. Rezultă că $\triangle A'B'C' \sim \triangle UVW$.

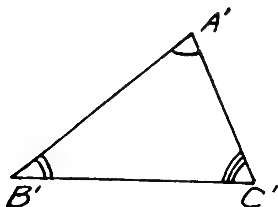



Fig. VII.G.95.a.

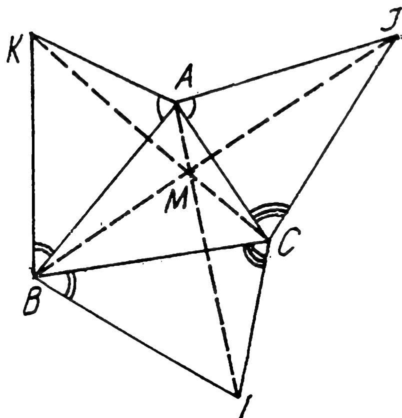



Fig. VII.G.95.b.

d) Ţinînd cont de triunghiurile asemenea date în enunţ şi de patrulaterele inscriptibile $AMCJ$ şi $BMCI$, rezultă că :

$$\sphericalangle CMJ \equiv \sphericalangle CAJ \equiv \sphericalangle A' \quad (1)$$

$$\sphericalangle AMJ \equiv \sphericalangle ACJ \equiv \sphericalangle C' \quad (2)$$

$$\sphericalangle CMI \equiv \sphericalangle CBI \equiv \sphericalangle B' \quad (3)$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că $m(\widehat{AMI}) = m(\widehat{A'}) + m(\widehat{B'}) + m(\widehat{C'}) = 180°$.

Deci punctele $A$, $M$, $I$ sînt coliniare. Analog, arătăm că punctele $B$, $M$, $J$ sînt coliniare şi $C$, $M$, $K$ sînt coliniare. Rezultă că cele trei drepte (diferite) se intersectează în $M$.

e) $\triangle ACJ \sim \triangle A'C'B'$. Rezultă că :

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}. \quad (4)$$

$\triangle AKB \sim \triangle A'C'B'$ Rezultă că

$$\frac{AB}{AK} = \frac{A'B'}{A'C'}. \quad (5)$$

Din (4) şi (5) rezultă că :

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{AB}{AK}. \quad (6)$$

Dar

$$\sphericalangle BAJ \equiv \sphericalangle KAC. \qquad (7)$$

Din (6) şi (7) rezultă că $\triangle AJB \sim \triangle ACK$. Deci

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{AB}{AK} = \frac{BJ}{CK} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

Rezultă că $BJ \cdot A'C' = CK \cdot A'B'$

Analog se demonstrează că : $CK \cdot A'B' = AI \cdot B'C'$.

Deci $\dfrac{AI}{\frac{1}{B'C'}} = \dfrac{BJ}{\frac{1}{A'C'}} = \dfrac{CK}{\frac{1}{A'B'}}$, adică segmentele $AI$, $BJ$, $CK$ sînt invers proporţionale cu laturile $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$ ale triunghiului $A'B'C'$.

**VII.G.96.** Fie $P$ intersecţia dreptelor $MN$ şi $BC$. (Vezi fig. VII.G.96.) Întrucît $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$, rezultă $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$, deci $AM = \frac{1}{4} \cdot AB$, $AM = \frac{1}{4} \cdot 24$ cm $=$ $= 6$ cm. Analog, $\frac{DN}{NC} = \frac{2}{3}$, rezultă $\frac{DN}{CD} = \frac{2}{5}$, deci $DN = \frac{2}{5} \cdot CD$, $DN =$ $= \frac{2}{5} \cdot 15$ cm $= 6$ cm. Deci $AM = DN$ şi $AM \parallel DN$. Rezultă că patrulaterul $AMND$ este paralelogram.

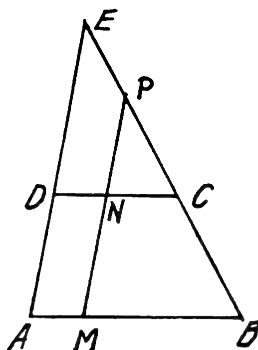



*Fig. VII.G.96.*

Deci $MN \parallel AE$. (1)

Deoarece $\triangle PNC \sim \triangle PMB$, rezultă : $\frac{PC}{BP} = \frac{NC}{MB} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ Deci

$$BP = 2 \cdot PC. \qquad (2)$$

Din (1) rezultă că putem aplica teorema lui Thales în triunghiul $ECD$. Avem $\frac{EP}{PC}=\frac{DN}{NC}=\frac{2}{3}$, de unde obținem $\frac{EP}{2\cdot PC}=\frac{2}{2\cdot 3}$, adică folosind (2), $\frac{EP}{BP}=\frac{1}{3}$.

**VII.G.97.** a) Notăm $EG=a$. Deoarece $GH$ este linie mijlocie în triunghiul $EFD$, rezultă $GH \parallel FD$. Aplicînd teorema lui Thales în $\triangle ACD$, rezultă $\frac{AI}{IC}=\frac{AG}{GD}=\frac{3a}{a}$. Deci $AI=3\cdot IC$.

b) Avem $GH=\frac{1}{2}\cdot FD=\frac{1}{4}\cdot BD=\frac{1}{4}\cdot CD$. (1)

Apoi $\triangle AGI \sim \triangle ADC$. Rezultă că $\frac{GI}{CD}=\frac{AG}{AD}$, adică $\frac{GI}{CD}=\frac{3a}{4a}$, deci $HI=\frac{3}{4}\cdot CD$. (2)

Din (1) și (2) rezultă $HI=3GH$.

c) $BE$ este mediană în triunghiul $ABD$. Prelungim mediana $BE$ cu segmentul $EM$, $EM=BE$. Patrulaterul $ABDM$ este paralelogram. Construim $EL \parallel BC$, $L \in AC$. Rezultă că $EL$ este linie mijlocie în triunghiul $ADC$. (3)

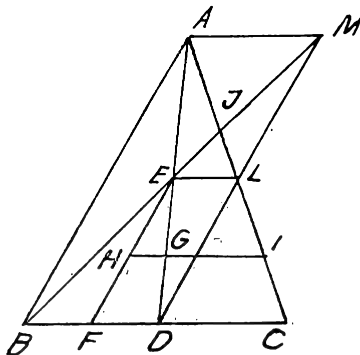



*Fig. VII.G.97.*

Deoarece $EL \parallel BC$ și $BC \parallel AM$, rezultă $EL \parallel AM$. Dar $AE=ED$, deci dreapta $EL$ conține linia mijlocie în triunghiul $ADM$. (4)

Din (3) și (4) rezultă că $AC$ și $MD$ se intersectează în $L$. Deoarece $AM \parallel EL$, din teorema fundamentală a asemănării rezultă că $\triangle EJL \sim \triangle MJA$. Deci $\frac{EL}{AM}=\frac{EJ}{MJ}$. Dar din (4) avem $\frac{EL}{AM}=\frac{1}{2}$. Deci $\frac{EJ}{MJ}=\frac{1}{2}$.

Rezultă că $MJ=2\cdot EJ$, deci $EM=3\cdot EJ$. Cum $EM=BE$, rezultă că $BE=3\cdot EJ$.

**VII.G.98.** a) Avem $\triangle AGD \sim \triangle BGE$ (U.U.). Rezultă că $\frac{DG}{EG} = \frac{AD}{BE} = \frac{1}{2}$ și cum $AD = BC$, avem $BE = 2 \cdot BC$. Din ipoteză, $FC = 2 \cdot EF$. Scăzînd cele două relații, obținem $EF = BC$, apoi $FB = AD$ și cum $FB \parallel AD$, rezultă că $AFBD$ este paralelogram. (1)

Pe de altă parte, deoarece $AB = AD$ și $m(\widehat{A}) = 60°$, triunghiul $ABD$ este echilateral. Deci $BF = AD = BD$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $AFBD$ este romb. (Vezi fig. VII.G.98.a.)

b) Avem $\triangle EFH \equiv \triangle DAH$ (U.L.U.). Rezultă că $EH = HD$, deci $H$ este mijlocul lui $DE$.

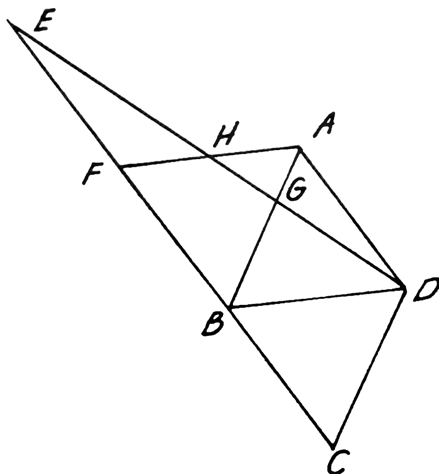



*Fig. VII.G.98.a.*

c) Din b) rezultă $EH = HD$, $FH = AH$. Patrulaterul ale cărui diagonale se intersectează în mijlocul fiecăreia este paralelogram. Deci $ADFE$ este paralelogram.

Sau : din a) rezultă $EF = AD$ și $EF \parallel AD$, deci $ADFE$ e paralelogram.

d) Din demonstrațiile anterioare rezultă că $AF = CD$. Cum $AD \parallel FC$, patrulaterul $ADCF$ este trapez isoscel, deci inscriptibil.

e) Notăm cu $F'$, $A'$, $D'$ respectiv proiecțiile lui $F$, $A$, $D$ pe dreapta $d$. (Vezi fig. VII.G.98.b.)

Fie $M$ mijlocul segmentului $AD$ și $N$ proiecția lui $M$ pe dreapta $d$.

Ducem prin $G$ o perpendiculară pe $d$ ; fie aceasta $G_1G_2$, $G_1 \in AD$, $G_2 \in FC$. Conform teoremei lui Thales avem $\frac{GG_1}{GG_2} = \frac{AG}{BG} = \frac{1}{2}$. Rezultă $\frac{AG_1}{BG_2} = \frac{1}{2}$ și cum $\frac{AM}{FB} = \frac{1}{2}$, obținem $\frac{G_1M}{FG_2} = \frac{1}{2}$. Rezultă că $\triangle MG_1G \sim$

$\sim \triangle FG_2G$ (L.L.L.), deci punctele $M$, $G$, $F$ sînt coliniare. Rezultă că $\triangle FF'G \sim \triangle MNG$, deci $\frac{MN}{FF'}=\frac{1}{2}$, deci $FF'=2\cdot MN$. (3)

Cum în trapezul $AA'D'D$, $MN$ este linie mijlocie, avem

$$MN=\frac{AA'+DD'}{2}. \qquad (4)$$

Din (3) și (4) rezultă că $FF'=AA'+DD'$.

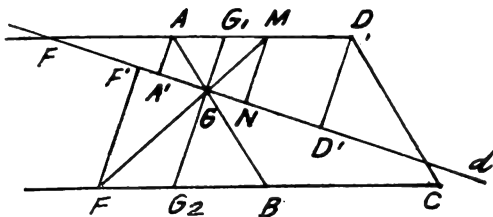



Fig. VII.G.98.b.

**VII.G.99.** a) Construim din $M$ paralela la BN care intersectează $AC$ în $N'$. (Vezi fig. VII.G.99.) Rezultă că $\triangle MCN' \sim \triangle BCN$, deci :

$$\frac{N'C}{NC}=\frac{MC}{BC}=\frac{1}{3}, \text{ deci : } N'C=\frac{1}{3}\cdot NC. \qquad (1)$$

Avem $PN \parallel MN'$. Aplicînd teorema lui Thales, obținem :

$$\frac{AP}{PM}=\frac{AN}{NN'}=\frac{\frac{1}{4}\cdot AC}{NN'}.$$

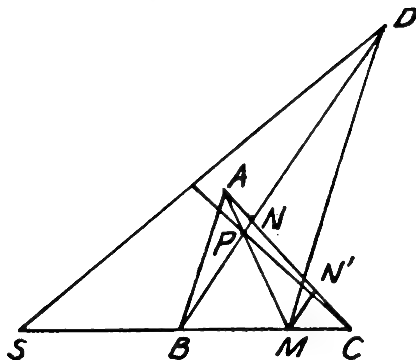



Fig. VII.G.99.

Folosind (1) calculăm $NN'$

$$NN' = AC - AN - N'C = AC - \frac{AC}{4} - \frac{NC}{3} = \frac{3AC}{4} - \frac{AC}{4} = \frac{AC}{2}.$$

Deci :

$$\frac{AP}{PM} = \frac{\frac{1}{4}AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{1}{2}$$

b) Deoarece $SB = BC$, $BD$ este mediană în triunghiul $SCD$. (2)
Deoarece $AB \parallel MD$, rezultă că $\triangle APB \sim \triangle MPD$, deci :

$$\frac{BP}{PD} = \frac{AP}{PM} = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Din (2) şi (3) rezultă că $P$ este centrul de greutate al triunghiului $SCD$, deci $CP$ este mediană în triunghiul $SCD$.

## CAPITOLUL IV. RELAŢII METRICE

**VII.G.100.** Aplicînd teorema înălţimii în triunghiul dreptunghic $ABC$, avem $BD \cdot CD = AD^2$. Dar în dreptunghiul $AEDF$, avem : $AD^2 = FD^2 + DE^2$.

Aplicînd teorema înălţimii în triunghiurile dreptunghice $ADC$ şi $ADB$, obţinem: $FD^2 + DE^2 = FC \cdot FA + EB \cdot EA$. Deci $DB \cdot DC = FC \cdot FA + EB \cdot EA$.

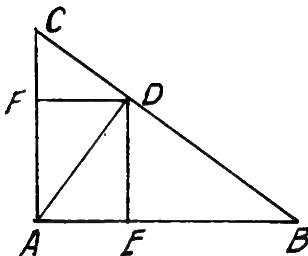



*Fig. VII.G.100.*

**VII.G.101.** Notăm cu $x$, respectiv $y$ lungimile segmentelor $AM$, $MB$. Fie $H$ intersecţia dreptelor $CD$ şi $AP$. (Vezi fig. VII.G.101.) Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $NMB$, $PCH$, obţinem :

$NB^2 = x^2 + y^2$ ;

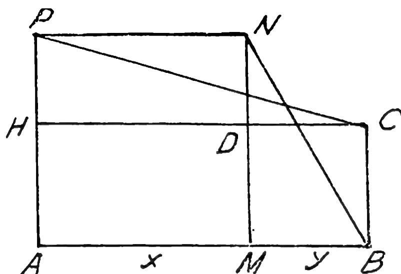



*Fig. VII.G.101.*

$$PC^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

Rezultă $\frac{PC^2}{NB^2} = 2$. Deci $\frac{PC}{NB} = \sqrt{2}$.

**VII.G.102.** Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiurile $ACE$, $BCE$, obținem succesiv :

$$AC^2 = CE^2 + AE^2 = BC^2 - BE^2 + AE^2 = BC^2 - (AE - AB)^2 + AE^2 =$$
$$= BC^2 - AE^2 + 2AE \cdot AB - AB^2 + AE^2 = BC^2 + 2AE \cdot AB - AB^2$$

Deci $AC^2 = BC^2 + 2AE \cdot AB - AB^2$. (1)

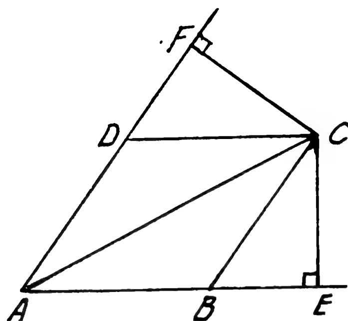



*Fig. VII.G.102.*

Analog, cu teorema lui Pitagora în triunghiurile $ACF$, $DCF$, obținem

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + CD^2 - DF^2 = AF^2 + CD^2 - (AF - AD)^2 =$$
$$= AF^2 + AB^2 - AF^2 + 2AF \cdot AD - BC^2 = AB^2 + 2AF \cdot AD - BC^2.$$

Deci : $AC^2 = AB^2 + 2AF \cdot AD - BC^2$. (2)

Adunînd relațiile (1) și (2) obținem : $2 \cdot AC^2 = 2AE \cdot AB + 2AF \cdot BC$, de unde $AE \cdot AB + AF \cdot AD = AC^2$.

**VII.G.103.** Notăm cu $G$ centrul de greutate al triunghiului $ABC$. (Vezi fig. VII.G.103.) Avem $B'G = \frac{1}{3} \cdot BB' = \frac{1}{3} \cdot 4{,}5 = 1{,}5$, $C'G = \frac{1}{3} \cdot CC' = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$, $BG = \frac{2}{3} \cdot BB' = 3$, $CG = \frac{2}{3} \cdot CC' = 4$.

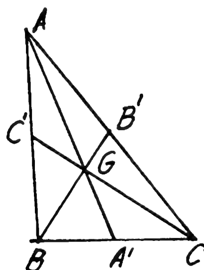



*Fig. VII.G.103.*

Se observă că triunghiul $BGC$ este dreptunghic avînd lungimile laturilor de 3, 4 și 5. Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul $B'GC$, $m(\widehat{G}) = 90°$, obținem : $B'C^2 = 4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{73}{4}$, $B'C = \frac{\sqrt{73}}{2}$ iar $AC = 2B'C = \sqrt{73}$.

În triunghiul $C'GB$, $m(\widehat{G}) = 90°$, obținem : $C'B^2 = 2^2 + 3^2 = 13$, $C'B = \sqrt{13}$, deci $AB = 2C'B = 2\sqrt{13}$. Am obținut : $AB = 2\sqrt{13}$, $BC = 5$, $AC = \sqrt{73}$.

**VII.G.104.** Fie $ABC$ un triunghi ascuțitunghic. (Vezi fig. VII.G.104.)

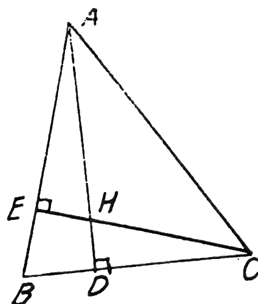



*Fig. VII.G.104.*

a) Deoarece $m(\widehat{AEC}) = 90° = m(\widehat{ADC})$, patrulaterul $AEDC$ este inscriptibil. Relația $AB \cdot BE = BC \cdot BD$ rezultă din puterea punctului $B$ față de cercul circumscris lui $AEDC$.

b) Deoarece patrulaterul $AEDC$ este inscriptibil, $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle HCB$. Rezultă că $\triangle ABD \sim \triangle CHD$ (U.U.), deci $\frac{DA}{CD} = \frac{BD}{HD}$, de unde obținem : $DA \cdot HD = BD \cdot CD$.

Dacă $m(\widehat{A}) = 90°$, atunci $H = A$ și relația devine $AD^2 = BD \cdot CD$, adică teorema înălțimii într-un triunghi dreptunghic.

Dacă triunghiul $ABC$ este obtuzunghic, se demonstrează analog a) și b).

**VII.G.105.** Fie $ABCD$ trapezul înscris în cercul de centru $O$, $AB = 2r$ ; fie $E$, $F$ proiecțiile lui $C$, respectiv $D$, pe dreapta $AB$. (Vezi fig. VII.G.105.) $ABCD$ fiind înscris în cerc, este trapez isoscel, deci $AF = BE$. Avem : $AF = \frac{AB - CD}{2} = \frac{75 - 51}{2} = 12$. $\sphericalangle BDA$ este înscris în semicerc, deci

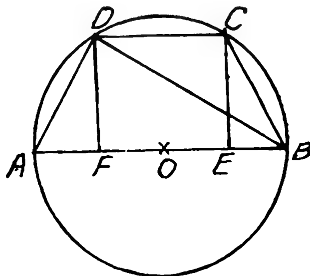



*Fig. VII.G.105.*

$m(\widehat{BDA}) = 90°$. Conform teoremei înălțimii, $DF = \sqrt{AF \cdot BF} = \sqrt{12 \cdot 63} = 6\sqrt{21}$. În triunghiul dreptunghic $ADF$ : $AD = \sqrt{AF^2 + DF^2} = \sqrt{12^2 + 36 \cdot 21} = \sqrt{4 \cdot 9(4 + 21)} = 6\sqrt{25} = 30$ ; $p = 2AD + CD + AB = 2 \cdot 30 + 51 + 75 = 186$.

În triunghiul dreptunghic $ABD$: $DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{75^2 - 30^2} = \sqrt{(75 - 30)(75 + 30)} = \sqrt{105 \cdot 45} = \sqrt{5 \cdot 21 \cdot 9 \cdot 5} = 15\sqrt{21}$. $AC = DB = 15\sqrt{21}$.

**VII.G.106.** a) Pentru diferite poziții ale lui $M$ pe diagonala $BD$, obținem diferite figuri ce corespund ipotezei. Analizăm cazul : $AB > AD$, $C$ între $B$ și $F$, $E$ între $A$ și $B$. (Vezi fig. VII.G.106.) Avem : $\triangle FMB \sim \triangle BDA$ (U.U.). Rezultă că : $\frac{BM}{DA} = \frac{MF}{AB}$. Dar $DA = BC$. Înlocuind, obținem :

$\frac{BM}{BC} = \frac{MF}{AB}$, adică $BM \cdot AB = BC \cdot MF$. (1)

În triunghiul dreptunghic $EBF$, conform teoremei înălțimii, avem :

$MB^2 = ME \cdot MF$. (2)

Ridicînd la pătrat relația (1) obținem $MB^2 \cdot AB^2 = BC^2 \cdot MF^2$. Înlocuind (2) rezultă : $AB^2 \cdot ME \cdot MF = BC^2 \cdot MF^2$, de unde : $AB^2 \cdot ME = BC^2 \cdot MF$.

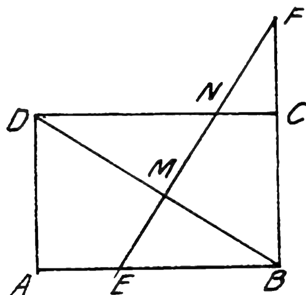



*Fig. VII.G.106.*

b) Avem :

$$\frac{(AB \cdot ME + BC \cdot MF)^2}{MB^2} = \frac{(AB \cdot ME + BC \cdot MF)^2}{MF \cdot ME} =$$

$$= \frac{AB^2 \cdot ME}{MF} + \frac{BC^2 \cdot MF}{ME} + \frac{2 \cdot AB \cdot AC \cdot MB^2}{MB^2} = \frac{BC^2 \cdot MF}{MF} + \frac{AB^2 \cdot ME}{ME} +$$

$$+ 2AB \cdot BC = BC^2 + AB^2 + 2AB \cdot BC = (AB + BC)^2.$$

Rezultă că : $\dfrac{AB \cdot ME + BC \cdot MF}{MB} = AB + BC = \text{constant}$.

Dacă $AB < AD$, se demonstrează analog a) și b).

**VII.G.107.** a) Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $ADM$, $BMN$, $CDN$ obținem

$$DM = \sqrt{AD^2 + AM^2} = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 + a^2}}{2}, \quad (1)$$

$$MN = \sqrt{MB^2 + BN^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad (2)$$

$$DN = \sqrt{CD^2 + CN^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2}. \quad (3)$$

Deoarece $0 < b < a$, din (1), (2) și (3) rezultă că :

$MN < DM < DN$. (4)

Deci numai $\sphericalangle M$ poate fi unghi drept în triunghiul $NMD$. Triunghiul $NMD$ este dreptunghic în $M$ dacă şi numai dacă : $DN^2 = DM^2 + MN^2$.

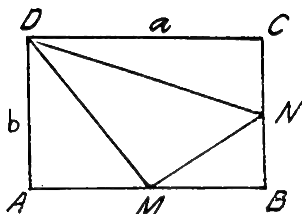



*Fig. VII.G.107.*

Înlocuind cu valorile obţinute în (1), (2) şi (3) rezultă

$$\frac{4a^2 + b^2}{4} = \frac{4b^2 + a^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{4}$$

ceea ce este echivalent cu $2a^2 = 4b^2$, deci $a^2 = 2b^2$, deci $a = b\sqrt{2}$.

Rezultă că $NMD$ este dreptunghic dacă şi numai dacă $a = b\sqrt{2}$.

b) Rezultă direct din (4) ; sau

CAZUL I

Presupunem că triunghiul $NMD$ este isoscel, avînd $DM = MN$. Din (1) şi (2) rezultă : $\frac{4b^2 + a^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$ deci $b = 0$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza $b > 0$.

CAZUL II

Presupunem că triunghiul $NMD$ este isoscel, avînd $DM = DN$. Din (1) şi (3) rezultă $\frac{4b^2 + a^2}{4} = \frac{4a^2 + b^2}{4}$ deci $3b^2 = 3a^2$, adică $(b - a)(b + a) = 0$. Rezultă că $b = a$, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza $b < a$. $(b + a > 0)$.

CAZUL III

Presupunem că triunghiul $NMD$ este isoscel, avînd $MN = DN$. Se tratează analog cazului I, rezultînd $a = 0$.

Deoarece nici una din cele trei situaţii nu este posibilă, triunghiul $NMD$ nu poate fi isoscel.

**VII.G.108.** Deoarece triunghiurile sînt asemenea, avem :

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}. \qquad (1)$$

Deoarece triunghiurile sînt dreptunghice de ipotenuze $a$, $a'$, avem :

$b^2 + c^2 = a^2$ şi $b'^2 + c'^2 = a'^2$. (2)

Înmulţind relaţiile (2), obţinem :

$b^2 \cdot b'^2 + b^2 \cdot c'^2 + b'^2 \cdot c^2 + c^2 \cdot c'^2 = a^2 \cdot a'^2$. (3)

Din ipoteză, $aa' = bc' + b'c$. (4)

Din (1), $bc' = b'c$. (5)

Înlocuind (4) şi (5) în (3), obţinem succesiv :

$b^2b'^2 + c^2c'^2 + 2b^2c'^2 = 4b^2c'^2$, $(bb' - cc')^2 = 0$, de unde

$bb' = cc'$. (6)

Înmulţind în ambii membri ai relaţiei (6) cu $c'$, obţinem $b'bc' = cc'^2$, adică $b'^2c - cc'^2 = 0$ şi înmulţind relaţia cu $\frac{1}{c}$, rezultă

$b'^2 = c'^2$, deci $b' = c'$. ($b' > 0$, $c' > 0$). (7)

Înmulţind relaţia (6) cu $c'$, obţinem $bb'c = c^2c'$, adică $b^2c' = c^2c'$ şi înmulţind relaţia cu $\frac{1}{c'}$, obţinem

$b^2 = c^2$, deci $b = c$. (Din (1) şi (7) rezultă direct $b = c$). (8)

Din (7) şi (8) rezultă că triunghiurile sînt isoscele.

**VII.G.109.** Notăm lungimile segmentelor $QC$, $PB$ cu $x$, respectiv $y$.
Avem : $\triangle ABP \sim \triangle PCQ$ (U.U.). Rezultă că :

$$\frac{AP}{QP} = \frac{a}{a - x} = \frac{x}{y}. \quad (1)$$

Ridicăm la pătrat termenii proporţiei $\frac{AP}{QP} = \frac{x}{y}$, şi obţinem apoi proporţia derivată : $\frac{AP^2 + QP^2}{QP^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$.

Conform teoremei lui Pitagora, în triunghiul $APQ$, avem $AP^2 + QP^2 = AQ^2$. Deci $\frac{AQ^2}{QP^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$.

Dar $\frac{AQ}{QP} = 2$ deoarece în triunghiul dreptunghic $APQ$, $m(\widehat{QAP}) = 30°$.

Deci : $\frac{AQ^2}{QP^2} = 4 = \frac{x^2 + y^2}{y^2}$, de unde rezultă $4 = \frac{x^2}{y^2} + 1$, adică $\frac{x^2}{y^2} = 3$, deci $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$,

Din (1) obţinem :

$$\frac{a}{a - x} = \sqrt{3}, \ a = \sqrt{3}(a - x), \ x = \frac{a\sqrt{3} - a}{\sqrt{3}} = \frac{a(\sqrt{3} - 1)\sqrt{3}}{3}.$$

În triunghiul dreptunghic $ABP$, teorema lui Pitagora conduce la

$$AP=\sqrt{a^2+\frac{a^2(\sqrt{3}-1)^2}{3}}=\sqrt{\frac{7a^2-2\sqrt{3}a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{(7-2\sqrt{3})\cdot 3}}{3}=$$

$$=\frac{a\sqrt{21-6\sqrt{3}}}{3}.$$

$$QP=\frac{AP}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{3},\ AQ=2QP=\frac{2a\sqrt{7-2\sqrt{3}}}{3}.$$

(Observăm că $AP$, $QP$, $AQ$ verifică teorema lui Pitagora în triunghiul $APQ$).

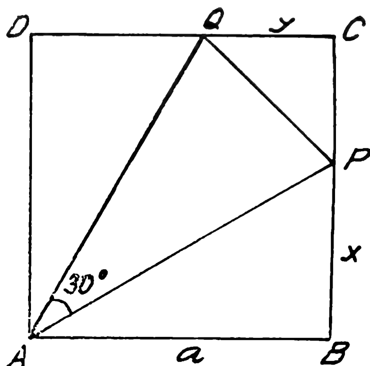



*Fig. VII.G.109.*

**VII.G.110.** a) Aplicăm teorema medianei (Vezi Indicații, Pb.VII.G.110.), în triunghiul $ABC$ pentru $BB'$, respectiv $C'C$. Avem :

$$\begin{cases} 4m_b^2=2(a^2+c^2)-b^2 \\ 4m_c^2=2(b^2+a^2)-c^2 \end{cases}$$

Înlocuind $m_b$, $m_c$, obținem :

$$\begin{cases} 324=2a^2+2c^2-b^2 \\ 576=2b^2+2a^2-c^2 \end{cases}$$

Însumînd cele două relații, rezultă : $900=4a^2+b^2+c^2$. Dar $a^2=$ $=100$. Deci $9a^2=4a^2+b^2+c^2$, de unde rezultă : $5a^2=b^2+c^2$.

b) Patrulaterele $ABCM$ și $ACBN$ sînt paralelograme (pentru că diagonalele lor se taie în părți egale), deci $AM \parallel BC$, $AN \parallel BC$. (1)

$AM=BC=AN.$ (2)

Din (1) rezultă că $N$, $A$, $M$ sînt coliniare şi $MN \perp AD$. (3)

Din (2) şi (3) rezultă că dreapta $AD$ este mediatoarea segmentului $MN$. Deci $DM = DN$, adică triunghiul $DMN$ este isoscel. (Vezi fig. VII.G.110.)

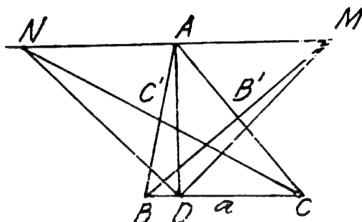



*Fig. VII.G.110.*

c) Folosind teorema medianei, obţinem următoarele relaţii echivalente :

$$m_a^2 = m_b^2 + m_c^2 \Longleftrightarrow 2(b^2 + c^2) - a^2 = 2(a^2 + c^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) -$$

$$- c^2 \Longleftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 = 5a^2 - b^2 - c^2.$$

Deci $m_a, m_b, m_c$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

**VII.G.111.** a) Arătăm mai întîi că punctele $A'$, $C$, $D'$ sînt coliniare. (Vezi fig. VII.G.111.) Dreapta $AC$ este axă de simetrie a figurii $ADCD'$ Rezultă $m(\widehat{ACD'}) = m(\widehat{ACD}) = 60°$. Dreapta $CD$ este axă de simetrie a figurii $AA'C$. Rezultă $m(\widehat{A'CD}) = m(\widehat{ACD}) = 60°$. Deci $m(\widehat{D'CA'}) = 3 \cdot 60° = 180°$. Adică punctele $A'$, $C$, $D'$ sînt coliniare. (1)

Deoarece dreapta $AC$ este axă de simetrie, rezultă că $\sphericalangle AD'C \equiv \sphericalangle ADC$. Dar $m(\widehat{ADC}) = 90°$, deci $m(\widehat{AD'C}) = 90°$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că triunghiul $AA'D'$ este dreptunghic.

b) Fie $a$ lungimea laturii triunghiului echilateral $ABC$. Arătăm că triunghiul $ABD'$ este dreptunghic.

Avem : $m(\widehat{BAD'}) = m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{CAD'})$ ; (3)

$\sphericalangle CAD' \equiv \sphericalangle CAD$ (fiind simetrice faţă de dreapta $AC$) ; (4)

$m(\widehat{CAD}) = 30°$. (5)

Din (3), (4) şi (5) rezultă că $m(\widehat{BAD'}) = 60° + 30° = 90°$. În triunghiul dreptunghic $BAD'$, folosind teorema lui Pitagora, obţinem $BD'^2 = AB^2 + AD'^2$.

Avem $AB = a$, $AD' = AD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Înlocuind, obţinem :

$$BD' = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \sqrt{\frac{7a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2} \quad \text{Deci } BD' = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Fie $P$, respectiv $R$ intersecția dreptei $AC$ cu $BD'$ și $DD'$. Avem $\triangle CBF \equiv \triangle BCP$ (U.L.U.). Rezultă că $CF = BP$. Deci în loc să calculăm $CF$, vom calcula $BP$. Construim $DL \parallel AC$, $L \in BD'$ În triunghiul $BCP$, $DL$ este linie mijlocie. Rezultă că $BL = LP$. În triunghiul $D'DL$, $PR$ este linie mijlocie. Rezultă că $LP = PD'$ Rezultă $BL = LP = PD'$. Deci $PB = \frac{3}{2} \cdot BD' = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$. Cum $CF = BP$, rezultă $CF = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

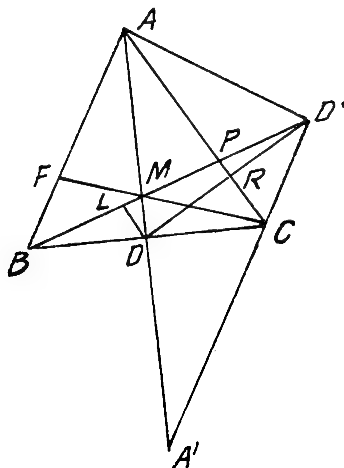



*Fig. VII.G.111.*

Altfel

Calculăm $BP$ în modul următor $m(\widehat{CAD'}) = 30°$, $m(\widehat{AD'A'}) = 90°$.

Rezultă că $CD' = \frac{1}{2} \cdot AC$. Dar $AC = A'C$. Deci $CD' = \frac{1}{2} \cdot A'C$. (6)

Avem $CP \parallel A'B$. Deci $\triangle CPD' \sim \triangle A'BD'$. Rezultă $\frac{BP}{PD'} = \frac{A'C}{CD'}$. (7)

Din (6) și (7) obținem $\frac{BP}{PD'} = 2$. Deci $\frac{BP}{PD' + BP} = \frac{2}{3}$, $\frac{BP}{BD'} = \frac{2}{3}$.

Rezultă $BP = \frac{2}{3} \cdot BD'$, deci $BP = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}$.

**VII.G.112.** METODA 1. (Vezi fig. VII.G.112 a.)

Notăm $AN = x$, $BP = y$. Cum dreptele $AN$, $BP$, $NM$ sînt tangente la cerc, avem $MN = AN = x$, $MP = BP = y$. Patrulaterul $ABPN$ este trapez dreptunghic.

Fie $Q$ proiecția lui $N$ pe dreapta $BP$. Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul $NQP$, obținem relația $(x+y)^2=(x-y)^2+4r^2$ care este echivalentă cu $4xy=4r^2$, deci $xy=r^2$, adică $AN \cdot BP = r^2$. (Se observă că în raționamentul făcut, nu a intervenit poziția punctului $M$ pe cerc).

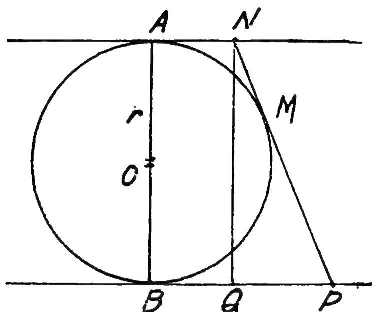



*Fig. VII.G.112.a.*

METODA 2. (Vezi fig. VII.G.112.b.)

Avem $AM \perp ON$, $BM \perp OP$. **(1)**

Dar $m(\widehat{AMB})=90°$. **(2)**

Din (1) și (2) rezultă că $m(\widehat{NOP})=90°$.

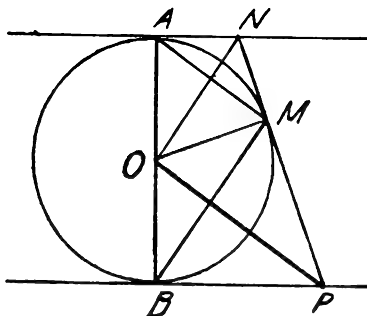



*Fig. VII.G.112.b.*

În triunghiul dreptunghic $NOP$, $OM$ este înălțime. Rezultă că:

$OM^2 = MN \cdot MP$. **(3)**

Dar $MN = AN$, $MP = BP$, $OM = r$. Înlocuind în (3), obținem $r^2 = AN \cdot BP$.

METODA 3.

În patrulaterul inscriptibil $OANM$, $\sphericalangle ANO \equiv \sphericalangle AMO$. În patrulaterul inscriptibil $OBPM$, $\sphericalangle BPO \equiv \sphericalangle BMO$. Dar $\sphericalangle AMB$ fiind drept, $\sphericalangle AMO$ și $\sphericalangle BMO$ sînt complementare. Cum triunghiul $OBP$ este dreptunghic în $B$, rezultă că $\sphericalangle BOP \equiv \sphericalangle ANO$, avînd același complement. Deci triunghiurile dreptunghice $AON$ și $BOP$ sînt asemenea. Obținem $\frac{AN}{OB}=\frac{OA}{BP}$, adică $\frac{AN}{r}=\frac{r}{BP}$, deci $r^2 = AN \cdot BP$.

**VII.G.113.** CAZUL I

Dacă triunghiul $ABC$ este ascuțitunghic, $\widehat{A} > \widehat{B}$, $\widehat{A} > \widehat{C}$, atunci $E$ este între $B$ și $D$. (Vezi fig. VII.G.113.a.)

a) Deoarece $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle BAD$ și $\sphericalangle B$ este comun triunghiurilor $ABC$ și $DBA$, avem $\triangle ABC \sim \triangle DBA$. (1)

Rezultă că $\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{AB}$, adică $AB^2 = BD \cdot BC$.

b) Analog, $\triangle ABC \sim \triangle EAC$. (2)

Rezultă că $\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{AC}$, adică $AC^2 = CE \cdot BC$.

c) Din (1) și (2) obținem că $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle AEC$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle ADB$. Rezultă că $\sphericalangle AEC \equiv \sphericalangle ADB$, deci triunghiul $ADE$ este isoscel.

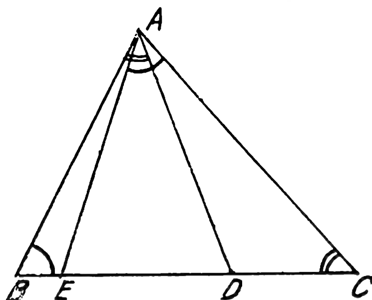



*Fig. VII.G.113.a.*

d) Din (1) și (2), conform tranzitivității relației de asemănare, obținem că $\triangle ABD \sim \triangle CAE$. Deci $\frac{BD}{AE}=\frac{AD}{CE}$.

Dar triunghiul $ADE$ este isoscel, deci $AE = AD$. Înlocuind în proporția de mai sus, obținem $\frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CE}$, adică $AD^2 = BD \cdot CE$.

CAZUL II

Dacă triunghiul $ABC$ este dreptunghic în $A$, atunci $AE$ coincide cu $AD$ și obținem $AB^2 = BD \cdot BC$, $AC^2 = CD \cdot BC$, $AD^2 = BD \cdot CD$, adică teorema catetei, respectiv înălțimii în triunghiul dreptunghic.

CAZUL III.

Dacă triunghiul $ABC$ este obtuzunghic în $A$, atunci $D$ este între $B$ şi $E$. (Vezi fig. VII.G.113 b.) Demonstraţia se face similar cazului I.

a) Avem $\triangle ABD \sim \triangle CBA$. Rezultă $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB}$, deci $AB^2 = BD \cdot BC$.

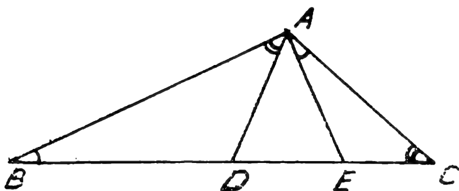



*Fig. VII.G.113.b.*

b) Avem $\triangle ACE \sim \triangle BCA$. Rezultă $\frac{AC}{BC} = \frac{CE}{AC}$, deci $AC^2 = CE \cdot BC$.

c) Unghiurile $ADE$ şi $AED$ sînt unghiuri exterioare triunghiurilor $ABD$, respectiv $AEC$. Avem: $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ECA}) + m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{AED})$. Rezultă că $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AED$. Deci triunghiul $ADE$ este isoscel.

d) Avem $\triangle ABD \sim \triangle CAE$, deci $\frac{BD}{AE} = \frac{AD}{EC}$ Dar $AD = AE$ şi înlocuind în ultima proporţie, obţinem $AD^2 = BD \cdot CE$.

*Observaţie :* dacă în triunghiul ascuţitunghic $ABC$, $\hat{A} < \hat{B}$ sau $\hat{A} < \hat{C}$ se poate rezolva o problemă similară considerînd punctele $E$ şi $D$ pe dreapta $BC$.

**VII.G.114.** CAZUL I :

Triunghiul $ABC$ ascuţitunghic. (Vezi fig. VII.G.114.a.) Fie $AD$ un diametru al cercului şi $AE$ înălţime, $E$ pe dreapta $BC$. Rezultă că

$m(\widehat{ABD}) = 90°$, $m(\widehat{AEC}) = 90°$. (1)

Patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil, deci :

$$\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ACB. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem că $\triangle ABD \sim \triangle AEC$, deci $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$, adică $AB \cdot AC = AD \cdot AE$. Celelalte relaţii se obţin printr-un raţionament similar.

CAZUL II :

Triunghiul $ABC$ este obtuzunghic. (Vezi fig. 114.b.) Considerăm $m(\hat{A}) > 90°$. Fie $AD$ un diametru al cercului şi $BE$ înălţimea din $B$, $E$ pe dreapta $AC$. Avem : $m(\widehat{BEC}) = 90°$, $m(\widehat{ABD}) = 90°$, $\sphericalangle ECB \equiv \sphericalangle ADB$.

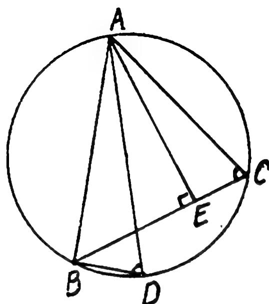


Fig. VII.G.114.a.

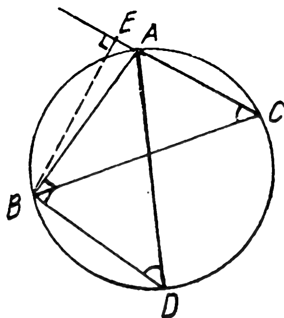


Fig. VII.G.114.b.

Deci $\triangle BEC \sim \triangle ABD$. Rezultă $\frac{BE}{AB}=\frac{BC}{AD}$, deci $AB \cdot BC = AD \cdot BE$.
Celelalte relaţii rezultă analog cazului I.

CAZUL III

Triunghiul $ABC$ este dreptunghic. Considerăm $m(\widehat{A}) = 90°$. $BC$ este diametru în cerc şi fie $AE$ înălţime.. Se obţine relaţia $AB \cdot AC = AE \cdot BC$ cu un raţionament similar cazului I.

Altfel : $AB^2 = BE \cdot BC$, $AC^2 = CE \cdot BC$ (teorema catetei). Înmulţind cele două relaţii, se obţine $AB^2 \cdot AC^2 = (BE \cdot CE) \cdot BC^2$. Dar $BE \cdot CE = AE^2$ (teorema înălţimii). Rezultă $AB^2 \cdot AC^2 = AE^2 \cdot BC^2$. De unde $AB \cdot AC = AE \cdot BC$.

**VII.G.115.** a) Fie $T$ pe semidreapta $GF$, exterior segmentului $GF$. (Vezi fig. VII.G.115.a.) Avem :

$$m(\widehat{GFD}) = m(\widehat{TFA}) = \frac{m(\widehat{AF})}{2} = m(\widehat{ABF}). \tag{1}$$

Deoarece $\sphericalangle AFB$ este înscris într-un semicerc, $m(\widehat{AFB}) = 90° = m(\widehat{BFD})$. În triunghiul dreptunghic $BFD$, avem :

$$m(\widehat{FDB}) + m(\widehat{FBD}) = 90°. \tag{2}$$

Dar $m(\widehat{ABF}) + m(\widehat{FBD}) = 90°$. (3)

Din (2) şi (3) rezultă că :

$$\sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle ABF. \tag{4}$$

Din (1) şi (4) rezultă că $\sphericalangle GFD \equiv \sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle FDG$. Deci triunghiul $GDF$ este isoscel.

b) (Vezi fig. 115.b.) Deoarece $EF$ şi $AB$ sînt diametri, patrulaterul $AFBE$ este dreptunghi. Dreptele $BG$ şi $GF$ sînt tangente la cerc în $B$ şi $F$, deci :

$$BG = FG. \tag{5}$$

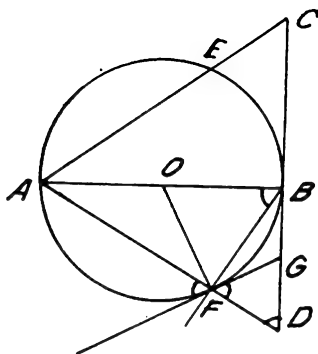



Fig. VII.G.115.a.

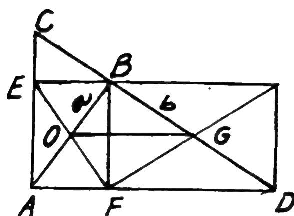



Fig. VII.G.115.b.

Conform a), triunghiul $FGD$ este isoscel ; rezultă

$FG = GD$. (6)

Din (5) şi (6) rezultă că $G$ este mijlocul segmentului $BD$. (7)

Cum $O$ este mijlocul lui $AB$, rezultă că $OG$ este linie mijlocie în triunghiul $ABD$. Deci :

$$OG = \frac{AD}{2} \quad (8)$$

Aplicînd teorema catetei în triunghiul dreptunghic $ACD$, obţinem : $AD^2 = BD \cdot CD$. Folosind (7) şi (8) rezultă $4OG^2 = 2GD \cdot CD$, adică $2OG^2 = GD \cdot CD$.

**VII.G.116.** METODA 1 (Vezi fig. VII.G.116.a.)

Fie $A'$ punctul diametral opus lui $A$. Unghiul $ACA'$ subîntinde un diametru, deci $m(\widehat{ACA'}) = 90°$. Rezultă că

$AC \perp A'C$. (1)

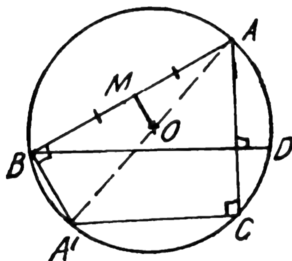



Fig. VII.G.116.a.

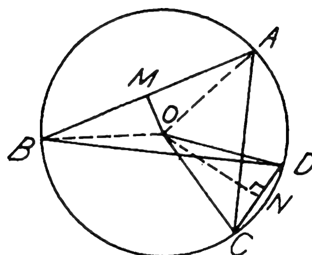



Fig. VII.G.116.b.

Dar, din ipoteză, $AC \perp BD$. (2)

Din (1) şi (2) avem $A'C \parallel BD$. Deci $BA'CD$ este trapez ; fiind înscris în cerc, $BA'CD$ este trapez isoscel, deci avem $CD = A'B$. (3)

În triunghiul $ABA'$, $MO$ este linie mijlocie, deci :

$$MO = \frac{A'B}{2}; \quad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă : $MO = \frac{CD}{2}$, deci $MO < CD$.

METODA 2 (Vezi fig. VII.G.116.b.) :

Construim razele $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ şi $OM \perp AB$, $ON \perp CD$, $M \in AB$, $N \in CD$. Triunghiul $DOC$ fiind isoscel, avem :

$$CN = \frac{1}{2} \cdot CD. \quad (5)$$

Unghiurile $COD$ şi $AOB$ sînt unghiuri la centru, deci : $m(\widehat{COD}) = m(\widehat{CD})$, $m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{AB})$. Dar $m(\widehat{CD}) + m(\widehat{AB}) = 180°$, deci $m(\widehat{COD}) + m(\widehat{AOB}) = 180°$. Dar triunghiurile $AOB$ şi $COD$ sînt isoscele, deci $OM$, respectiv $ON$ sînt bisectoare în aceste triunghiuri. Rezultă că : $m(\widehat{MOB}) + m(\widehat{CON}) = \frac{m(\widehat{AOB})}{2} + \frac{m(\widehat{COD})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$. Deci $\sphericalangle MOB$ şi $\sphericalangle NOC$ sînt complementare.

Rezultă că $\sphericalangle MOB \equiv \sphericalangle OCN$, avînd acelaşi complement. Obţinem că $\triangle MOB \equiv \triangle NCO$, (I.U.), de unde :

$$MO = CN. \quad (6)$$

Din (5) şi (6) rezultă că $OM = \frac{1}{2} \cdot CD$, deci $OM < CD$.

METODA 3 (Vezi fig. VII.G.116.c) :

Notăm cu $r$ lungimea razei cercului. Fie $P$ intersecţia diagonalelor patrulaterului. Avem $\triangle BCP \sim \triangle BOM$, rezultă :

$$\frac{BC}{r} = \frac{CP}{MO}. \quad (7)$$

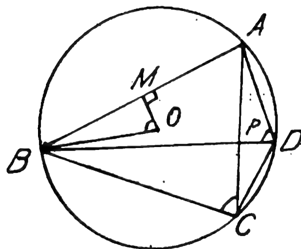



*Fig. VII.G.116.c.*

Avem $\triangle\ ADP \sim \triangle\ BOM$, rezultă

$$\frac{AD}{r}=\frac{DP}{MO} \tag{8}$$

Din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiul dreptunghic $CPD$, obţinem : $CD^2 = PD^2 + PC^2$. Înlocuind cu expresiile obţinute în (7) şi (8), avem : $CD^2 = \frac{MO^2 \cdot AD^2}{r^2} + \frac{BC^2 \cdot MO^2}{r^2}$. Dînd factor comun, relaţia devine :

$$CD^2 = \frac{MO^2}{r^2} \cdot (AD^2 + BC^2). \tag{9}$$

Din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiurile dreptunghice formate de diagonale, obţinem $AB^2 + CD^2 = CB^2 + AD^2$ şi înlocuind în (9), avem :

$$CD^2 = \left(\frac{MO}{r}\right)^2 \cdot (AB^2 + CD^2). \tag{10}$$

Dar $AB = 2MB$, iar în triunghiul dreptunghic $MOB$, $MB^2 = r^2 - MO^2$. Determinăm $CD$ din ecuaţia (10). Obţinem :

$$\left\{1 - \left(\frac{MO}{r}\right)^2\right\} \cdot CD^2 = \frac{MO^2}{r^2} \cdot 4MB^2, \quad \frac{r^2 - MO^2}{r^2} \cdot CD^2 = 4 \cdot \frac{MO^2}{r^2} \cdot (r^2 - MO^2).$$

Cum $O < MO < r$, rezultă $CD^2 = 4 \cdot MO^2$, adică $CD = 2 \cdot MO$. Deci $MO < CD$.

**VII.G.117.** METODA 1

$$\text{Avem} : \frac{r}{2r} = \frac{\frac{r}{2}}{r}, \text{ deci } \frac{OP}{OB} = \frac{OM}{OP} \tag{1}$$

Apoi $\sphericalangle POM \equiv \sphericalangle POB$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\triangle\ POM \sim \triangle\ BOP$, conform cazului de asemănare L.U.L. Analog, $\triangle\ QOM \sim \triangle\ BOQ$, deoarece $\sphericalangle MOQ$ este comun şi $\frac{OM}{OQ} = \frac{OQ}{OB} = \frac{1}{2}$. Rezultă că $\frac{PB}{PM} = 2$ şi $\frac{QB}{QM} = 2$, deci $PB + QB = 2PQ$.

METODA 2

Folosim teorema lui Pitagora generalizată. Notăm : $MP = x$, $MQ = y$.

În triunghiul $POM$, obţinem

$$\cos \widehat{POB} = \frac{r^2 + \frac{r^2}{4} - x^2}{2r \cdot \frac{r}{2}} = \frac{5r^2 - 4x^2}{4r^2}.$$

În triunghiul $POB$, avem : $PB^2 = r^2 + 4r^2 - 4r^2 \cos \widehat{POB} = 5r^2 - (5r^2 - 4x^2) = 4x^2$.

Deci $PB = 2x$. (3)

Analog, arătăm că $BQ = 2y$. (4)

Din (3) și (4) rezultă că $PB + BQ = 2x + 2y = 2(x + y) = 2PQ$.

Generalizare :

Fie $C(O, r)$ și o secantă $BM$ ce trece prin $O$, astfel încît $r^2 = OM \cdot OB$, $M$ interior cercului cu $\frac{r}{OM} = a$. Fie $PQ$ o coardă ce trece prin $M$. ($P$, $Q$ pe cerc). Atunci $BP + BQ = a \cdot PQ$.

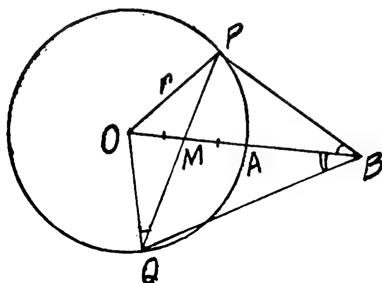



*Fig. VII.G.117.*

Demonstrație :

Deoarece $r$ este media geometrică a lui $OM$, $OB$ și $OM < r$, rezultă $OM < r < OB$, deci $B$ este exterior cercului. Obținem că : $\triangle POM \sim \triangle BOP$ și $\triangle QOM \sim \triangle BOQ$ (L.U.L.), de unde rezultă că $\frac{PB}{MP} = a$ și $\frac{BQ}{MQ} = a$, deci $BP = aMP$ și $BQ = aMQ$. Însumînd ultimile relații, obținem : $BP + BQ = a \cdot PQ$.

**VII.G.118.** În orice triunghi $ABC$ sînt satisfăcute relațiile de inegalitate :

$|AC - AB| < BC < AC + AB$. Deci :

$|AC - AB| < 1 < AC + AB$. (1)

Deoarece $AB, AC \in \mathbf{N}$, din (1) rezultă că $AC = AB$, deci triunghiul $ABC$ nu poate fi decît isoscel. Fie $AB = a$. Demonstrăm că, în ipotezele date, este satisfăcută relația $a < 2r < a + 1$. Deoarece diametrul este cea mai mare coardă, rezultă că $a < 2r$.

Fie $A'$ punctul diametral opus lui $A$. (Vezi fig. VII.G.118.) În triunghiul $ABA'$, avem :

$2r < AB + A'B$. (2)

Dacă $a = 1$, rezultă că triunghiul $ABC$ este echilateral, deci $r < a = 1$. Dar $r > \frac{5}{2}$. Rezultă că $a > 1$. Deci $m(\widehat{A}) < 90°$, deci $m(\widehat{BA'C}) > 90°$, deci $BA' < 1$. (3)

Din (2) şi (3) rezultă $2r < a + 1$.

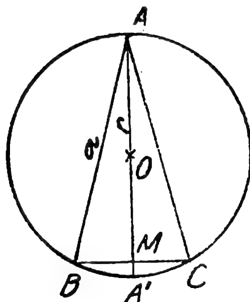



*Fig. VII.G.118.*

Dar $5 < 2r < 7$. Deci: $5 < a + 1$ şi $a < 7$. Rezultă $4 < a < 7$. Cum $a \in N$, rezultă că $a \in \{5, 6\}$.

Fie $M$ proiecţia lui $A$ pe $BC$. Aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice $OBM$ şi $ABM$, obţinem:

$$\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}} + r = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}.$$

Trecînd $r$ în membrul doi şi ridicînd la pătrat rezultă:

$$a^2 = 2r\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}.$$

Deci: $r = \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}}}$, adică $r = \dfrac{a^2}{\sqrt{4a^2 - 1}}$. (4)

Pentru $a = 5$, $r = \dfrac{25}{\sqrt{99}} \in \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$.

Pentru $a = 6$, $r = \dfrac{36}{\sqrt{143}} \in \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$.

Deci problema are două soluţii:

I: $AB = AC = 5$, $AA' = \dfrac{50}{\sqrt{99}} = \dfrac{50\sqrt{11}}{33}$.

II: $AB = AC = 6$, $AA' = \dfrac{72}{\sqrt{143}} = \dfrac{72\sqrt{143}}{143}$.

*Altfel :*

Am arătat că $r = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - 1}}$. (4)

Avem următoarele inegalități

$$\frac{a}{2} = \frac{a^2}{2a} < \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - 1}} < \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad (5)$$

$$\frac{5}{2} < r < \frac{7}{2}. \quad (6)$$

Din (4), (5) și (6) rezultă $\frac{a\sqrt{3}}{3} > \frac{5}{2}$, deci $a > \frac{5\sqrt{3}}{2}$. Deci $a \geqslant 5$. Pe de altă parte, din (4), (5) și (6) rezultă că $a < 7$. Deci $5 \leqslant a < 7$. Deci $a \in \{5, 6\}$.

**VII.G.119.** a) Avem $\triangle ABN \equiv \triangle ADM$ (C.C.). Rezultă că :

$$\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle ADE. \quad (1)$$

Dar, $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle NAF$. (2)

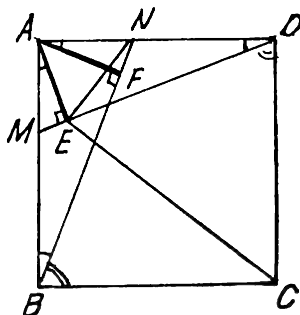



*Fig. VII.G.119.*

Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle NAF \equiv \sphericalangle ADE$. Deci $\triangle ANF \sim \triangle DAE$. (U.U.). Rezultă că : $\frac{ED}{AF} = \frac{AD}{AN}$. Dar $AF = AE$, $AD = CD$, deci :

$$\frac{ED}{AE} = \frac{CD}{AN}. \quad (3)$$

$\sphericalangle EAN \equiv \sphericalangle CDE$, avînd același complement. (4)

Din (3) și (4) rezultă că $\triangle AEN \sim \triangle DEC$ (L.U.L.).

*Altfel :*

Conform teoremei înălţimii în triunghiul $AMD$, avem

$AE^2 = ME \cdot DE.$ (5)

Conform teoremei catetei în triunghiul $AMD$, avem

$AM^2 = ME \cdot DM$ ; (6)

$AD^2 = DE \cdot DM.$ (7)

Din (5), (6) şi (7) rezultă : $\left(\frac{AE}{AM}\right)^2 = \frac{DE^2}{AD^2}$, deci : $\frac{AE}{AM} = \frac{DE}{AD}$.

Dar $AM = AN$, $AB = CD$ (din ipoteză). Rezultă că

$$\frac{AE}{AN} = \frac{DE}{CD}; \tag{8}$$

$$\sphericalangle EAN \equiv \sphericalangle AMD \equiv \sphericalangle MDC. \tag{9}$$

Din (8) şi (9) rezultă că $\triangle AEN \sim \triangle DEC$.

b) Avem : $\triangle AEN \equiv \triangle AFM$ (L.U.L.), $\triangle DEC \equiv \triangle BFC$ (L.U.L.). Aplicînd a) rezultă că $\triangle AFM \sim \triangle BFC$, deci : $\frac{AF}{BF} = \frac{FM}{CF} = \frac{AM}{BC}$, de unde rezultă că $AF \cdot CF = BF \cdot FM$.

c) Am demonstrat anterior că $\triangle AEN \sim \triangle DEC$. Rezultă că $\sphericalangle ANE \equiv \sphericalangle DCE$, deci patrulaterul $DNEC$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\widehat{NEC}) = 90°$, deci $CE$ şi $NE$ sînt perpendiculare.

d) Patrulaterele $BCFM$ şi $DCEN$ sînt congruente. Deoarece punctele $D$, $C$, $E$, $N$ sînt conciclice [conform c)] rezultă că şi punctele $B$, $C$, $F$, $M$ sînt conciclice.

*Observaţie :* deoarece dreapta $AC$ este axă de simetrie a figurii, b) şi d) se puteau demonstra analog cu a) respectiv c).

# CLASA A VIII-A

## REZOLVĂRILE ŞI REZULTATELE PROBLEMELOR PENTRU CLASA A VIII-A

**VIII.A.1.**

a) $A = (-3\ ;\ 6)$, $B = [-5\ ;\ 2)$, $A \setminus B = [2\ ;\ 6)$.

b) $(A \setminus B) \cap \mathbf{N} = \{2, 3, 4, 5\}$.

**VIII.A.2.** Vom afla întîi valorile lui $x \in \mathbf{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbf{Z}$ şi apoi alegem dintre ele pe acelea pentru care $E(x) \leqslant 0$.

Avem $E(x) = \dfrac{x - 4 + 7}{x - 4} = 1 + \dfrac{7}{x - 4}$.

$E(x)$ este întreg dacă $\dfrac{7}{x-4}$ este întreg, adică atunci cînd $x - 4$ divide pe 7.

Deci :

$x - 4 = 1,$ de unde : $x = 5$

$x - 4 = -1,$ $x = 3$

$x - 4 = 7,$ $x = 11$

$x - 4 = -7,$ $x = -3$

Înlocuind în $E(x)$, obţinem :

$E(5) = \dfrac{(5 + 3)}{(5 - 4)} = 8$

$E(3) = -6$

$E(11) = 2$

$E(-3) = 0$

De aici deducem că $x \in \{-3, 3\}$.

**VIII.A.3.** Deoarece $x^2+7>0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, atunci $\frac{x^2+7}{3x-4}>0$ dacă $3x-4>0$. Deci, $\frac{3x-4}{2x-6}<0$ dacă $2x-6<0$. Sistemul de inecuații dat este echivalent cu sistemul de inecuații

$$\begin{cases} 3x-4>0 \\ 2x-6<0 \end{cases}$$

Soluția sistemului va fi

$$x \in \left(\frac{4}{3} \quad +\infty\right) \cap \left(\frac{4}{3} \quad 3\right) = \left(\frac{4}{3}\,;\ 3\right)$$

**VIII.A.4.** Avem

$$A=(-2\,;\ 2) \text{ și } B=(-\infty,\ -1) \cup \left(-\frac{1}{2},\ \infty\right).$$

$$A \cup B = \left[(-\infty\,;\ -1) \cup \left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)\right] \cap (-2\,;\ 2) = (-\infty \quad +\infty) = \mathbf{R}$$

$$\text{și } A \cap B = \left[(-\infty \quad -1) \cup \left(-\frac{1}{2};\ +\infty\right)\right] \cap$$

$$\cap\ (-2\,;\ 2) = (-2\,;\ -1) \cup \left(-\frac{1}{2}\,;\ 2\right).$$

**VIII.A.5.** a) Soluțiile pentru cele două inecuații sînt $x \in \left(-1\,;\ \frac{9}{2}\right)$, respectiv $x \in (-2\,;\ 3)$.

b) $A \cap B = \left(-1\,;\ \frac{9}{2}\right) \cap (-2\,;\ 3) = (-1\,;\ 3).$

$A \cup B = \left(-1\,;\ \frac{9}{2}\right) \cup (-2\,;\ 3) = \left(-2\,;\ \frac{9}{2}\right).$

$B \cap \mathbf{Z} = (-2\,;\ 3) \cap \mathbf{Z} = \{-1\,;\ 0\,;\ 1\,;\ 2\}.$

$A \cap \mathbf{N} = \left(-1\,;\ \frac{9}{2}\right) \cap \mathbf{N} = \{0\,;\ 1\,;\ 2\,;\ 3\,;\ 4\}.$

c) $3 \in A$ înseamnă $3 \in \left(-1\,;\ \frac{9}{2}\right)$, propoziție adevărată.

$[1\,;\ 2] \subset A \cap B$ înseamnă $[1\,;\ 2] \subset (-1\,;\ 3)$, propoziție adevărată.

$2,\ 5(39) \in B \setminus A$ înseamnă $2{,}53939\ldots \in (-2\,;\ -1]$, propoziție falsă.

$(2,\ 2) \in AXB$ înseamnă $2 \in A$ și $2 \in B$, propoziție adevărată.

**VIII.A.6.** a) Prima inecuaţie devine $\frac{n+2}{8n+7} < \frac{1}{1\,000} + \frac{1}{8}$, sau $\frac{n+2}{8n+7} < \frac{1008}{8000}$ şi, cum numitorii sînt pozitivi ($n \in \mathbf{N}$), rezultă $8000n + 16000 < 8064n + 7056$, $n > \frac{1119}{8}$ şi $n$ natural, de unde $n \geqslant 140$.

A doua inecuaţie se transformă asemănător şi dă $n > 0$, deci soluţia sistemului este $\{n \in \mathbf{N} \mid n \geqslant 140\}$.

b) Cum $1986^5 > 140$, conform punctului a), avem

$$-\frac{1}{1000} < E(1986^5) - \frac{1}{8} < \frac{1}{1000}\text{, sau încă}$$

$$0{,}124 = \frac{1}{8} - \frac{1}{1000} < E(1986^5) < \frac{1}{8} + \frac{1}{1000} = 0{,}126,$$

de unde $E(1986^5) = 0{,}12\ldots$, primele două zecimale fiind exacte.

## CAPITOLUL II

## FUNCŢII

**VIII.A.7.**

a) $m = 3$, atunci $f(x) = 0$; graficul este axa $Ox$.

b) $m = 0$, atunci $f(x) = -3x + 3$.

Tabelul de valori este

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 3 | 0 |

cu graficul

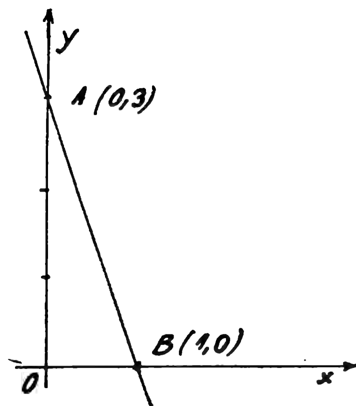



*Fig. VIII.A.7.b.*

c) $m = 2$, atunci $f(x) = 3x + 1$.

Tabelul de valori este :

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 4 |

cu graficul

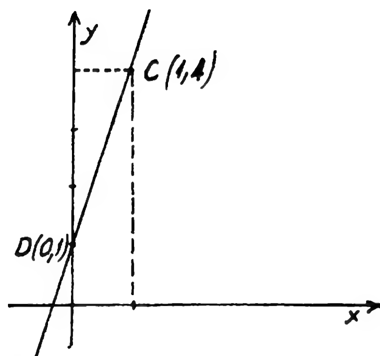



*Fig. VIII.A.7.c.*

d) $m = \frac{1}{2}$, atunci $f(x) = \frac{5}{2}$, funcție constantă; graficul paralel cu $Ox$.

**VIII.A.8.** Avem tabelul de valori

| $x$ | 0 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2 | 0 | 2 |

Graficul apare în figură.

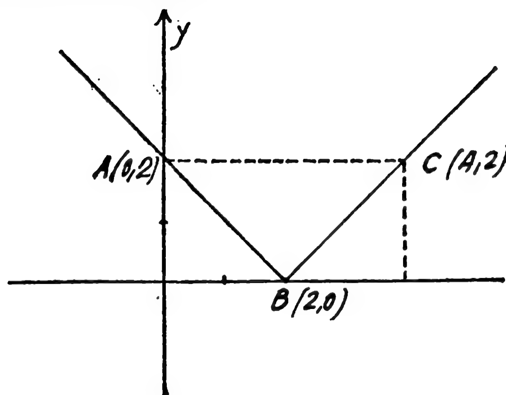



*Fig. VIII.A.8.*

De observat că funcţia putea fi pusă şi sub o unică expresie, $f(x) = |x - 2|$.

**VIII.A.9.** a) Deoarece $x_A = 1 \notin (1 ; 7]$, rezultă că $A$ nu se află pe graficul funcţiei $f$.

Deoarece $x_A = 1 \in [-10 ; 2]$ şi $g(x_A) = g(1) = -1 + 3 = 2 = y_A$, rezultă că $A$ se află pe graficul funcţiei $g$.

b) În primul rînd, avem condiţia $x \in (1 ; 7] \cap [-10 ; 2] = (1 ; 2]$. Construim acum tabelul de variaţie al expresiei $\frac{f(x)}{g(x)}$ cu $x \in \mathbf{R}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | | $-1$ | | $3$ | | | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | — | — | — | 0 | + | + | + | + | + | + | + | + |
| $x+3$ | + | + | + | + | + | 0 | — | — | — | — | — | — |
| $\frac{x+1}{x+3}$ | — | — | — | 0 | + | + \| | — | — | — | — | — | — |

Deci $x \in [-1 ; 3)$, de unde, ţinînd cont şi de condiţia pusă mai sus, obţinem soluţia inecuaţiei : $x \in [-1 ; 3) \cap (1 ; 2] = (1 ; 2]$.

**VIII.A.10.**

Pentru $M_1(x, y) \in AB$ avem $\frac{M_1M'_1}{AO} = \frac{M'_1B}{OB} = \frac{OB - M_1M'_1}{OB}$, deci $\frac{y}{3} = \frac{3-x}{3}$, sau încă $y = -x + 3$. ($M'_1$ este proiecţia lui $M_1$ pe $Ox$).

Analog, pentru $M_2(x, y) \in BC$, obţinem $y = x - 3$ şi, deci, funcţia căutată va fi $f : [0 ; 6] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, \text{ dacă } 0 < x \leqslant 3 \\ x - 3, \text{ dacă } 3 < x < 6 \end{cases}$$

De observat că funcţia se poate pune sub forma $f(x) = |x - 3|$.

b) Avem, evident, $AB = BC = 3\sqrt{2}$ şi $AC = 6$. Înălţimea $\triangle ABC$ fiind $BB' = 3$, avem $S_{ABC} = AC \cdot \frac{BB'}{2} = 6 \cdot \frac{3}{2} = 9$.

**VIII.A.11.** a) Rezolvăm sistemul :

$$\begin{cases} 2f + g = 2x + 14 \\ f - 2g = 6x - 18 \end{cases}$$

cu necunoscutele $f$ şi $g$ şi $x$ privit ca parametru. Se obţine $f = 2x + 2$ şi $g = -2x + 10$. Deci, $f(x + 1) = 2x + 2$ şi, înlocuind pe $x$ prin $x - 1$, obţinem $f(x) = 2(x - 1) + 2 = 2x$. Din $g(x - 2) = 2x + 10$, înlocuind

$x$ prin $x+1$, obținem $g(x) = -2(x+1) + 10 = -2x + 8$. În concluzie, $f(x) = 2x$ și $g(x) = -2x + 8$.

b) Avem $f(0) = 0$ și $f(1) = 2$, $g(0) = 8$, $g(1) = 6$.

Reprezentarea grafică este imediată.

Fie $M(x, y)$ punctul de intersecție al celor două grafice. Coordonatele lui $M$ vor verifica ecuațiile ambelor drepte, deci vor fi soluțiile sistemului :

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x + 8 \end{cases}$$

Se obține $x_M = 2$ și $y_M = 4$.

**VIII.A.12.** a) Pentru ca $M(4, -5)$ să aparțină graficului trebuie ca $f(4) = -5$, adică $-8 + m = -5$, $m = 3$.

b) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \\ -2x + 3, & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$

Întocmim tabelul de valori

| $x$ | 0 | 1 | 1,5 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | 0 | -1 | -5 |

Graficul este :

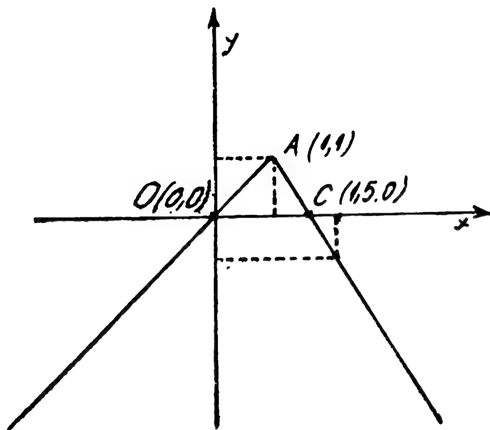



*Fig. VIII.A.12.*

c) Ținînd cont că se cer valorile lui $x$ pentru care funcția este negativă, deci pentru care graficul ei este situat sub axa $Ox$, deducem că $f(x) \leqslant 0$ cînd $x \in (-\infty, 0] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

**VIII.A.13.** a) Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 1 \\ y = -\sqrt{3}x + 1 \end{cases}$$

Avem, succesiv :

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 1 \\ \sqrt{3}x + 1 = -\sqrt{3}x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

Notînd cu $A$ punctul de intersecţie, avem $A(0, 1)$.

b) Reprezentăm grafic cele două funcţii, în acelaşi sistem de axe, aflînd intersecţia graficelor cu axa $Ox$ ; punctul $A(0, 1)$ reprezentată intersecţia cu $Oy$.

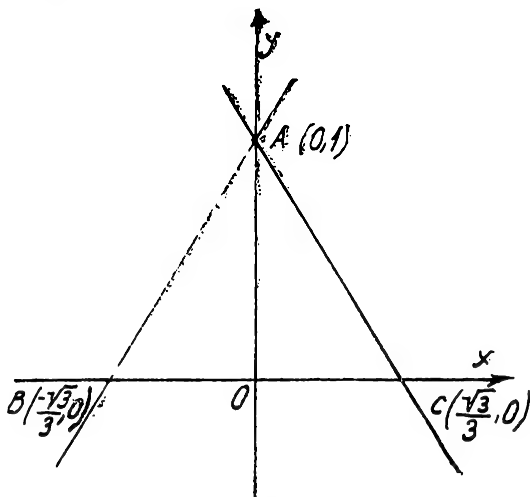



*Fig. VIII.A.13.*

Unghiul cerut este $\widehat{BAC}$.

În $\triangle ABC$ avem $(OB) \equiv (OC)$ şi $AO \perp BC$, deci $\triangle ABC$ isoscel ($AO$ — mediană şi înălţime).

În $\triangle ABO$, $m(\widehat{O}) = 90°$, avem $\text{tg}B = \frac{AO}{OB}$; $\text{tg}B = \sqrt{3}$, adică $m(\widehat{B}) = 60°$. $\triangle ABC$ isoscel, cu $m(\widehat{B}) = 60°$, implică $\triangle ABC$ echilateral, deci $m(\widehat{BAC}) = 60°$.

**VIII.A.14.** a) Calculăm : $f(x_1) - f(x_2)$ ; $ax_1 + b - ax_2 - b = ax_1 - ax_2 = a(x_1 - x_2)$ și, cum $a \neq 0$ și $x_1 \neq x_2$, adică $x_1 - x_2 \neq 0$, rezultă că $f(x_1) - f(x_2) \neq 0$, deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{ax_1 + b + ax_2 + b}{2} = \frac{a(x_1 + x_2) + 2b}{2} =$

$= a \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + b = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

c) $f(x - 1) + 2f(x + 2) = [a(x - 1) + b] + 2[a(x + 2) + b] = ax - a + b + 2ax + 4a + 2b = 3ax + 3a + 3b = 3(ax + a + b) =$

$$= 3[a(x + 1) + b] = 3f(x + 1).$$

**VIII.A.15.** Pentru $x = 2$ se obține $f(1) = -2 - f(1)$, de unde $f(1) = -1$ și, deci, $f(x - 1) = 3x - 7$, relație valabilă pentru orice $x$ real.

Luînd $x + 1$ în loc de $x$, se obține $f(x + 1 - 1) = 3(x + 1) - 7$, sau încă $f(x) = 3x - 4$. Rămîne de verificat dacă punctele $A$, $B$, $C$, $D$ sînt pe graficul lui $f$, adică $y_A = f(x_A)$ etc.

Din $f(0) = -4$, $f(5) = 11$, $f(3) = 5$, și $f(10) = 26$, rezultă că doar $A$ și $D$ aparțin graficului funcției $f$.

**VIII.A.16.** Luăm $x = 3$ și obținem $f(2) = -9 - 5 - f(2)$ sau $2f(2) = -14$ adică $f(2) = -7$ (1).

Luăm $x = 1$ și ținem cont de (1) ; vom avea $f(0) = -3 - 5 + 7$, sau $f(0) = -1$.

Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} f(2) = -7 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ b = -1 \end{cases}$$

unde $a$ și $b$ sînt numere reale, cu $f(x) = ax + b$.

Rezultă $a = -3$ și $b = -1$, adică funcția $f(x) = -3x - 1$.

**VIII.A.17.** a) Notăm $x - 4 = y$, de unde $x = y + 4$ și avem $f(y) = a(y + 4)$.

Cum sîntem obișnuiți cu variabila $x$, vom schimba pe $y$ cu $x$ și, deci $f(x) = ax + 4a$.

b) Din $P \in G_f$, avem $f(1) = \frac{a-9}{2}$, sau $a + 4a = \frac{a-9}{2}$, cu soluţia $a = -1$.

c) Se obţine $x \in \left(-\infty, -\frac{14}{3}\right)$.

**VIII.A.18.** Punctul $A$, de intersecţie al dreptelor date de ecuaţiile $x + y = 1$ şi $x + ky = 3$, se află rezolvînd sistemul format din cele două ecuaţii.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + ky = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -x - ky = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = \frac{2}{k-1} \end{cases}$$

Obţinem

$$x = 1 - \frac{k-1}{2} \qquad \text{sau} \qquad x = \frac{k-3}{k-1}$$

$$y = \frac{2}{k-1} \qquad\qquad y = \frac{2}{k-1}$$

Deci $A\left(\frac{k-3}{k-1}, \frac{2}{k-1}\right)$

$A \in G_f$ dacă şi numai dacă $f\left(\frac{k-3}{k-1}\right) = \frac{2}{(k-1)}$. Avem, succesiv:

$$-k\,\frac{k-3}{k-1} + 2 = \frac{2}{k-1}$$

$$-k^2 + 3k + 2k - 2 = 2;$$

$$-k^2 + 5k - 4 = 0$$

$$k^2 - 5k + 4 = 0.$$

Obţinem $k = 1$ (nu convine) şi $k = 4$.

**VIII.A.19.** a) Ştim că $A(x_0, y_0)$ aparţine graficului unei funcţii $f$ dacă $f(x_0) = y_0$.

Vom avea, deci : $f(1) = 0$ şi $f(2) = 0$.

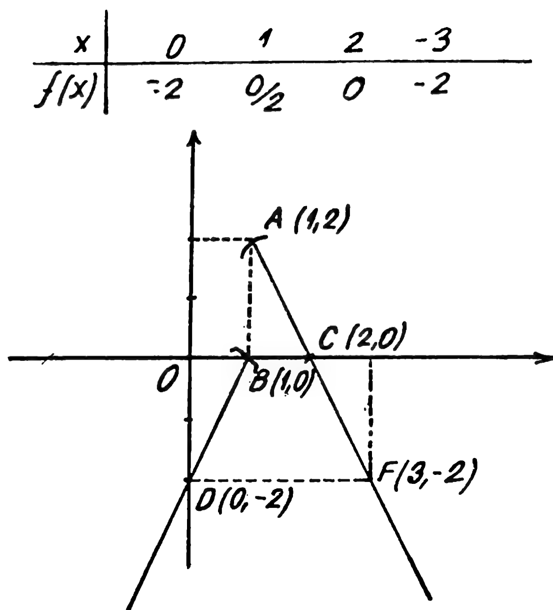
Dar $f(1) = 2a - 2$, iar $f(2) = -4 + b$.

Deducem că $2a - 2 = 0$, adică $a = 1$ şi $-4 + b = 0$, adică $b = 4$.

b) Funcţia este :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{pentru } x \leqslant 1 \\ -2x + 4, & \text{pentru } x > 1 \end{cases}$$

Graficul este cel din figură.



| x | 0 | 1 | 2 | -3 |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | -2 | 0/2 | 0 | -2 |



*Fig. VIII.A.19.*

c) Pentru $x \leqslant 1$, $f(x) = 2x - 2$ este negativă sau zero, deci $a = 1$ ; pentru $x > 1$, luăm $b = 0$ şi, deci, $f(x) = -2x$, care este negativă.

Putem lua, de asemenea, $a = \frac{1}{2}$ şi $b = 1$.

În general :

Pentru $x > 1$, înmulţind cu $-2$ ambii membri şi, apoi, adunînd, ambii membri, găsim $-2x + b < -2 + b$. Funcţia fiind negativă. trebuie ca membrul drept să fie mai mic sau egal cu zero, deci $-2 + b \leqslant 0$, adică $b \leqslant 2$, deci $b \in (-\infty, 2]$.

Pentru $x \leqslant 1$, înmulţind în ambii membri cu $2a$ şi scăzînd, apoi, pe 2 din ambii membri, avem $2ax - 2 \leqslant 2a - 2$ ($a$ fiind pozitiv, în celelalte cazuri nu convine). În ultima inegalitate membrul drept trebuie să fie şi el negativ sau zero, deci $2a - 2 \leqslant 0$ sau $a \leqslant 1$, deci $a \in (0, 1]$.

Din intervalele găsite pentru $a$ şi $b$ putem lua orice valori dorim.

**VIII.A.20.**

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{dacă} \quad x - 2 \geqslant 1 - x \\ 1 - x, & \text{dacă} \quad x - 2 < 1 - x \end{cases}$$

sau, echivalent :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{dacă } x < \frac{3}{2} \\ x - 2, & \text{dacă } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

Reprezentarea grafică este imediată.

**VIII.A.21.**

a) Tabelul de valori este :

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -4 | -1 | 0 | 0 | 1 |

Ținînd cont că $f$ este liniară pe intervalele (0 ; 2) și [2 ; + ∞), obținem graficul

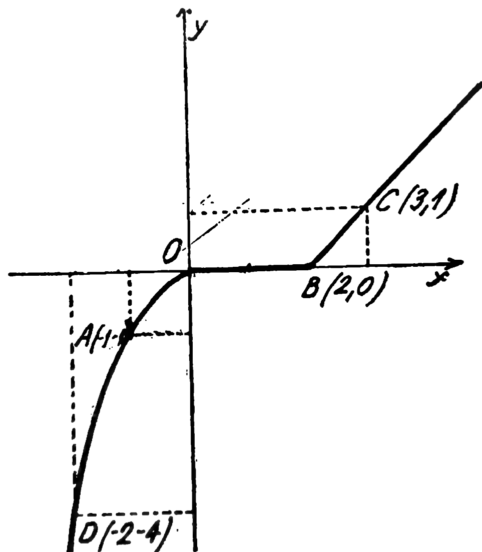



*Fig. VIII.A.21.*

b) $f(-2) = -4$, $f(1) = 0$, $f(14) = 12$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$

și, deci, $f(-2) + f(1) \cdot f(14) - 2f\left(-\frac{1}{2}\right) : f\left(\frac{5}{2}\right) = -4 + 0 \cdot 12 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$ $\frac{1}{2} = -4 + 1 = -3.$

**VIII.A.22.** Fie $x_1$, $x_2$, $x_3$ numere întregi. Evident, printre ele există cel puţin două de aceeaşi paritate, fie ele $x_1$ şi $x_2$. Avem atunci : $f(x_1) - f(x_2) = (3x_1^2 - 1) - (3x_1^2 - 1) = 3(x_1 - x_1)(x_1 + x_2)$, şi cum $x_1$, $x_2$ au aceeaşi paritate, rezultă că $x_1 - x_2$ şi $x_1 + x_2$ sînt pare, deci $f(x_1) - f(x_2)$ este multiplu de $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

**VIII.A.23.** Reprezentăm într-un sistem de axe punctele $A$, $B$, $C$ ; funcţia căutată are două forme una, pe $[1, 2,)$, cealaltă, pe $[2, 3]$ ; fiind vorba de segmente, aceste forme sînt liniare.

Pentru $x \in [1, 2)$, avem $f_1(x) = ax + b$.

Pentru $x \in [2, 3]$, avem $f_2(x) = mx + n$.

Condiţiile ca $A$ şi $B$ să aparţină graficului lui $f_1$ conduc la sistemul :

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 2 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2 \end{cases} \quad \text{cu soluţia :} \quad \begin{matrix} a = 1 \\ b = 0 \end{matrix}$$

Întrucît $B$ şi $C$ aparţin graficului lui $f_2$, deducem $m = 1$ şi $n = 4$.

În concluzie, vom avea $f$ $[1, 3] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in [1, 2) \\ -x + 4, & \text{dacă } x \in [2, 3] \end{cases}$$

## CAPITOLUL III

## POLINOAME. FRACŢII RAŢIONALE

**VIII.A.24.** a)

$$P(2) = 2^{10} - 2 \cdot 2^9 + 2^8 - 2 \cdot 2^7 + 2^6 - 2 \cdot 2^5 + 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 2^{10} - 2^{10} + 2^8 - 2^8 + 2^6 - 2^6 + 2^4 - 2^4 + 2^2 - 2^2 + 1 = 1.$$

b)

$$Q(11) = 11^{17} - 12 \cdot 11^{16} + 12 \cdot 11^{15} - 12 \cdot 11^{14} + \ldots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 = 11^{16}(11 - 12) + 12 \cdot 11^{15} - 12 \cdot 11^{14} + \ldots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 =$$

$$= -11^{16} + 12 \cdot 11^{15} - 12 \cdot 11^{14} + \ldots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 =$$

$$= 11^{15}(-11 + 12) - 12 \cdot 11^{14} + \ldots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 =$$

$$= 11^{15} - 12 \cdot 11^{14} + \ldots - 12 \cdot 11^2 + 12 \cdot 11 - 1 = \ldots = 10.$$

**VIII.A.25.**

$$E(x) = x^3 + ax^2 + x^2 + ax + bx + b + 1 =$$
$$= x^3 + ax^2 + bx + x^2 + ax + b + 1 =$$
$$= x(x^2 + ax + b) + (x^2 + ax + b) + 1 =$$
$$= (x^2 + ax + b)(x + 1) + 1.$$

Deoarece $x^2 + ax + b = 0$, rezultă $E(x) = 1$.

**VIII.A.26.** Avem

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = 1 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \leqslant 1,$$

deoarece pătratul unui număr real este nenegativ. Acum, prima inegalitate și a doua se reduc la $xy \leqslant 1$, care este deja demonstrată.

Într-adevăr $x^2 + y^2 - 2 = (x + y)^2 - 2xy - 2 =$
$= 4 - 2xy - 2 = 2 - 2xy = 2(1 - xy)$. Deci, $x^2 + y^2 - 2 \geqslant 0$, adică $x^2 + y^2 \geqslant 2$. Analog : $x^3 + y^3 - 2 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 2 =$
$= 2[(x + y)^2 - 3xy] - 2 = 4 - 3xy - 1 = 3 - 3xy = 3(1 - xy)$.

Deci, $x^3 + y^3 - 2 \geqslant 0$, adică $x^3 + y^3 \geqslant 2$.

**VIII.A.27.**

b) Suma din enunț se mai poate scrie $(x - y)^{17} - (x - y)^{17} + (a - b)^2 - (a - b)^2 = 0$.

**VIII.A.28.** Numărul 13, scris ca diferență de pătrate este : $13 = x^2 - y^2$ sau $13 = (x - y)(x + y)$. Cum unica descompunere a lui 13 este $1 \cdot 13$, deducem :

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 1 \\ \text{cu soluția } x = 7 \text{ și } y = 6 \end{cases}$$

Deci, $13 = 7^2 - 6^2$.

Analog obținem : $31 = 16^2 - 15^2$.

Generalizare : Dacă $p \in \mathbf{N}$ este impar, atunci :

$$p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Se demonstrează (1) :

Din $p = x^2 - y^2$, deducem $p = (x - y)(x + y)$. Considerăm situația (care nu este unică) :

$$\begin{cases} x + y = p \\ x - y = 1, \end{cases}$$

cu soluția $x = \dfrac{p+1}{2}$; $y = \dfrac{p-1}{2}$.

Deci, $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$

Să calculăm suma $S$, pornind de la $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$ deoarece toţi termenii sumei sînt numere impare. Avem : $1 = 1^2 - 0^2$, $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2, \ldots, 1985 = 993^2 - 992^2$ ; $1 + 3 + 5 + \ldots + 1985 = 993^2$.

**VIII.A.29.** $E(X,Y,Z) = X^3 + X^2Y - 2X^2Z - 2XYZ + 2XZ + 2YZ - X - Y = X^2(X + Y) - 2XZ(X + Y) + 2Z(X + Y) - (X + Y) =$
$= (X + Y)(X^2 - 2XZ + 2Z - 1) =$
$= (X + Y)[(X^2 - 1) - (2XZ - 2Z)] =$
$= (X + Y)[(X - 1)(X + 1) - 2Z(X - 1)] =$
$= (X + Y)(X - 1)(X + 1 - 2Z)$.

Pentru $x = 1$ obţinem : $E(1, Y, Z) = (1 + Y)(1 - 1)(1 + 1 - 2Z) = 0$, deci, în particular, $E(1, 1, 1) = E(1, 2, 2) = \ldots = E(1, 1986, 1986) = 0$.

**VIII.A.30.** Metoda I.

$(X + Y)(X^2 - XY + Y^2) + 3(X + Y)(XY + XZ + ZY + Z^2) + Z^3 =$
$= (X + Y)[X^2 + 2XY + Y^2 + 3(X + Y)Z + 3Z^2] + Z^3 =$
$= (X + Y)[(X + Y)^2 + 3(X + Y)Z + 3Z^2] + Z^3 =$
$= (X + Y)^3 + 3(X + Y)^2Z + 3(X + Y)Z^2 + Z^3 =$
$= [(X + Y) + Z]^3 = (X + Y + Z)^3$.

Metoda a II-a.

$(X + Y + Z)^3 = (X + Y + Z)^2(X + Y + Z) =$
$= (X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ)(X + Y + Z) =$
$= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(XY^2 + XZ^2 + YX^2 + YZ^2 + ZX^2 + ZY^2 + 2XYZ) =$
$= X^3 + Y'^3 + Z^3 + 3[X(Y^2 + Z^2 + 2YZ) + ZY(Z + Y) + X^2(Y + Z)] =$
$= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(Y + Z)[X(Y + Z) + ZY + X^2] =$
$= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(Y + Z)(XY + XZ + ZY + X^2) =$
$= X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(Y + Z)(X + Z)(X + Y)$. În concluzie :
$X^3 + Y^3 + Z^3 + 3(X + Y)(Y + Z)(Z + Y) = (X + Y + Z)^3$.

**VIII.A.31.** a)

$$P(X, Y, Z) = X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2Y^2Z^2 - 2X^2Z^2 =$$
$$= (X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 + 2Y^2Z^2) - 4Y^2Z^2 =$$
$$= (X^2 - Y^2 - Z^2)^2 - 4Y^2Z^2 =$$
$$= (X^2 - Y^2 - Z^2 + 2YZ)(X^2 - Y^2 - Z^2 - 2YZ) =$$
$$= [X^2 - (Y - Z)^2][X^2 - (Y + Z)^2] =$$
$$= (X - Y + Z)(X + Y - Z)(X - Y - Z)(X + Y + Z).$$

b) Metoda I. Pentru a calcula valoarea numerică a polinomului este convenabil să îl punem într-o altă formă, astfel încît să apară în expresia sa cele trei sume cu valorile cunoscute din enunț.

$$P(X, Y, Z) = (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 - 4(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2) =$$
$$= [(X + Y + Z)^2 - 2(xY + YZ + ZX)]^2 -$$
$$- 4[(XY + YZ + ZX)^2 - 2(XY^2Z + X^2YZ + XYZ^2)] =$$
$$= (X + Y + Z)^4 - 4(X + Y + Z)^2(XY + YZ + ZX) +$$
$$+ 4(XY + YZ + ZX)^2 - 4(XY + YZ + ZX)^2 +$$
$$+ 8XYZ(X + Y + Z) = (X + Y + Z)[(X + Y + Z)^3 -$$
$$- 4(X + Y + Z)(XY + YZ + ZX) + 8XYZ]$$

Obținem $(-9)\left[(-9)^3 + 9 \cdot 4\left(-\frac{4}{9}\right) + 8 \cdot 4\right] =$

$$= (-9)(-729 - 16 + 32) = 6417.$$

Metoda a II-a.

Pentru calcularea valorii numerice a polinomului se poate pleca de la descompunerea acestuia în factori ireductibili

$$P(X, Y, Z) = (X - Y + Z)(X + Y - Z)(X - Y - Z)(X + Y + Z).$$

Ținem cont că

$$x + z = -y - 9$$
$$x + y = -z - 9$$
$$-y - z = x + 9$$
$$x + y + z = -9$$

Deci

$$P = (-2y - 9)(-2z - 9)(2x + 9)(-9) =$$
$$= -9(2y + 9)(2z + 9)(2z + 9) =$$
$$= -9(4yz + 18y + 18z + 81)(2x + 9) =$$
$$= -9[8xyz + 36(xy + yz) + 162(x + y + z) + 729] =$$
$$= -9(32 - 16 - 1458 + 729) = 6417.$$

**VIII.A.32.** a)

$$P(X) = X(X^3 + 6X^2 + 11X + 6) =$$
$$= X(X^3 + 2X^2 + 4X^2 + 8X + 3X + 6) =$$
$$= X[X^2(X + 2) + 4X(X + 2) + 3(X + 2)] =$$
$$= X(X + 2)(X^2 + 4X + 3) = X(X + 2)(X^2 + X + 3X + 3) =$$
$$= X(X + 2)[X(X + 1) + 3(X + 1)] = X(X + 1)(X + 2)(X + 3).$$

b) $P(a) = a(a+1)(a+2)(a+3)$, pentru orice $a$ întreg. $P(a)$ se divide cu 24, dacă $P(a)$ se divide cu 3 și cu $8 = 2^3$. Cum $a$, $a+1$, $a+2$ sînt întregi consecutive, produsul lor se divide cu 3, deci $P(a)$ se divide cu 3.

Pentru $a = 2k$ (par), avem

$$P(2k) = 2k(2k+1)(2k+2)(2k+3) = 2k(2k+1)2(k+1)(2k+3).$$

În $P(2k)$ apare de două ori factorul 2, deci $P(2k)$ se divide cu $2^2$, iar $k$ și $k+1$ sînt consecutive, deci produsul lor se divide cu 2. În concluzie $P(2k)$ este divizibil cu $2^3$.

Pentru $a = 2k+1$ avem

$P(2k+1) = (2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4) =$

$= (2k+1)2(k+1)(2k+3)2(k+2)$ și din nou factorul 2 apare de două ori iar $k+1$ și $k+2$ sînt consecutive.

Deci, și în acest caz, $P(2k+1)$ se divide cu $2^3$.

În concluzie $P(a)$ este divizibil cu $2^3$.

Deducem că $P(a)$ este divizibil cu 24.

**VIII.A.33.** Condiția ca cel mai mic multiplu comnu al celor două polinoame să fie produsul lor este echivalentă cu condiția ca cel mai mare divizor comun să fie 1, adică polinoamele să fie prime între ele (fără factori comuni).

Cum $P(X) = X^3 + 2X^2 - X - 2 = X(X^2 - 1) + 2(X^2 - 1) = (X + 2)(X^2 - 1) = X + 2)(X+1)(X-1)$, aceasta revine la a spune că $Q(X)$ să nu aibă rădăcini valorile $-2$, $-1$ și 1, adică

$Q(-2) = -8 + 4 + 8 + a = a + 4 \neq 0$
$Q(-1) = -1 + 1 + 4 + a = a + 4 \neq 0$
$Q(1) = 1 + 1 - 4 + a = a - 2 \neq 0$,
adică $a \in \mathbf{R} \setminus \{-4 ; 2\}$.

**VIII.A.34.** Relația este echivalentă cu : $[(2^n)]^2 + [(2^{2n})]^2 - 2 \cdot 2^{2n+1} \geqslant 0$ sau $[(2^n - 2^{2n})]^2 \geqslant 0$, ceea ce este evident.

**VIII.A.35.** Desfăcînd parantezele și grupînd convenabil termenii, obținem echivalenta relației din enunț sub forma :

$$(b-a)(c-b)(c-a) = 0$$

Cum cel puțin una din paranteze trebuie să fie egală cu zero, rezultă că triunghiul este isoscel.

**VIII.A.36.** Din $\dfrac{a-b}{c} + \dfrac{c-a}{b} + \dfrac{b-c}{a} = 0$, rezultă :

$a^2b - ab^2 + ac^2 - a^2c - bc^2 + b^2c = 0$, de unde avem, succesiv

$ab(a-b) + c^2(a-b) - c(a^2 - b^2) = 0$

$(a-b)[ab + c^2 - c(a+b)] = 0$

$(a-b)(ab + c^2 - ac - bc) = 0$

$(a-b)[a(b-c) - c(b-c)] = 0$

$(a-b)(b-c)(a-c)=0,$

Deci, $a-b=0$, sau $b-c=0$, sau $a-c=0$.

În concluzie, $a=b$, sau $b=c$, sau $c=a$, eventual chiar $a=b=c$, cu condiţia $a, b, c \neq 0$.

**VIII.A.37.** Avem

$x^6+x^4-2x^3-2x^2-2=(x^6-2x^3+1)+(x^4-2x^2+1)=$
$=(x^3-1)^2+(x^2-1)^2$ şi, cum orice pătrat de număr real este nenegativ, rezultă că suma de pătrate obţinută este mai mare sau egală cu 0 pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În plus, egalitatea cu zero are loc doar cînd ambele pătrate sînt zero, adică $x^3-1=0$ şi $x^2-1=0$, ceea ce implică $x=1$.

**VIII.A.38.** Fie $y=2n+1$, $n \in \mathbf{N}$. Avem

$y^2-25=4n^2+4n+1-25=4n^2+4n-24=$
$=4(n^2+n-6)=4[n(n-1)-6]$.

Dar $n(n+1)$ este număr par, notat cu $2k$ pentru orice $k \in \mathbf{N}$, deci $(y^2-25)^2=[4(2k-6)]^2=[8(k-3)]^2=64(k-3)^2$. deci 64 divide $(y^2-25)^2$.

**VIII.A.39.** a) Eliminînd parantezele, obţinem succesiv :

$E(a, b)=1000a^3+3\cdot 100a^2b+100a^2+3\cdot 10ab^2+2\cdot 10ab+b^3+b^2$.
$E(a, b)=(10a)^3+3(10a)b+3(10a)b^2+b^3+(10a)^2+2(10a)+b^2$
$E(a, b)=(10a+b)^3+(10a+b)^2$.

b) Folosind punctul a), putem scrie :
$E(a, b)=(10a+b)^3+(10a+b)^2$ sau încă
$E(a, b)=(10a+b)^2)(10a+b+1)$.

Cum $a$, $b$ sînt cifre avem $E(a, b)=(\overline{ab})^2(\overline{ab}+1)$.

Pentru ca $E(a, b)$ să fie pătrat perfect trebuie ca $\overline{ab}+1$ să fie pătrat perfect.

Pătrate perfecte de două cifre avem 16, 25, 36, 49, 64, 81. Dacă, $\overline{ab}+1=16$, adică $\overline{ab}=15$; avem $a=1$, $b=5$, adică perechea (1, ; 5).

Analog, obţinem perechile : (2, 4), (4, 8), (6, 3), (8, 0).

Putem considera şi cazul cînd $\overline{ab}+1=100$ ; în acest caz avem $\overline{ab}=99$, adică perechea (9, 9).

**VIII.A.40.** Avem

$47^3+53^3=(47+53)(47^2-47\cdot 53+53^2)=M_{100}=100k_1$ ;
$48^3+52^3=(48+52)(48^2-48\cdot 52+52^2)=M_{100}=100k_2$ ;
$49^3+51^3=(49+51)(49^2-49\cdot 51+51^2)=M_{100}=100k_3$ ;
$50^3=5^3\cdot 1000=M_{100}=100k_4$.

Deci, $x=M_{100}=100k$ şi ultimele două cifre ale numărului vor fi zerouri.

b) Avem

$$P(a) = a^4 - 3a^3 + a^2 + 3a^2 - 9a + 3 = a^2(a^2 - 3a + 1) + 3(a^2 - 3a + 1) = (a^2 - 3a + 1)(a^2 + 3) = 0.$$

**VIII.A.41.** Avem succesiv :

$$E(x) = x^8(x^4 - 1) - (x^4 - 1) = (x^4 - 1)(x^4 - 1)(x^4 + 1) = (x^2 - 1)^2 (x^2 + 1)^2 (x^4 + 1).$$

$x = 2k + 1$ implică $x^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$, care este divizibil cu $2^3$.

Deci, $(x^2 - 1)^2$ divizibil cu $(2^3)^2 = 2^6$.

$x = 2k + 1$ implică $x^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$, divizibil cu 2.

Deci, $(x^2 + 1)^2$ divizibil cu $2^2$.

$x = 2k + 1$ implică $x^4 + 1 = (2k + 1)^4 + 1 = M_2 + 1 + 1 = M_2$, deci divizibil cu 2.

În concluzie, $E(x)$ se divide cu $2^6 \cdot 2^2 \cdot 2 = 2^9 = 512$.

**VIII.A.42.**

$$E = a^3 + 3a^2b + a^2b + 3ab^2 + b^3 - b^3 + ab + b^2 - b - a = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) = (a^2b - b^3) + (ab + b^2) - (b + a) = (a + b)^3 + b(a + b)(a - b) + b(a + b) - (a + b).$$

Cum fiecare termen conține $a + b$, iar acesta se divide cu 7, rezultă că $E$ se divide cu 7.

**VIII.A.43.** Avem

$$P = (2x^2 - x + 3)^2 [(2x^2 - x + 3) + 6] + 12(x^2 - x + 3) + 8 = (2x^2 - x + 3)^3 + 3(2x^2 - x + 3)^2 \cdot 2 + 3(2x^2 - x + 3) \cdot 2^2 + 2^3 = [(2x^2 - x + 3) + 2]^3 = (2x^2 - x + 5)^3.$$

În plus,

$$2x^2 - x + 5 = 2\left[x^2 - \left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{16}\right)\right] - \left(\frac{1}{8}\right) + 5 = 2\left[x - \left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 + \left(\frac{39}{8}\right) > 0,$$

pentru $x \in \mathbf{R}$ și, în consecință, $P = (2x^2 - x + 5)^3 > 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

**VIII.A.44.** Pentru ca să avem $(2X + 1) \mid P(X)$ trebuie ca $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

Dar $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ se scrie succesiv

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^{n+1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^{2n+1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 0,$$ deci soluția.

**VIII.A.45.**

$$P(X) = X^n \cdot X - nX + n - X = X(X^n - 1) - n(X - 1) =$$
$$= X(X - 1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots X + 1) - n(X - 1) =$$
$$= (X - 1)[X(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots X + 1) - n].$$

Cum $P(X)$ conține factorul $X - 1$, pentru a dovedi că se divide cu $(X - 1)^2$ este suficient să arătăm că :

$C(X) = X(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots X + 1) - n$ este divizibil cu $X - 1$, adică $C(1) = 0$.

Dar $C(1) = 1\underbrace{(1 + 1 + \dots 1 + 1)}_{\text{de } n \text{ ori}} - n = n - n = 0.$

**VIII.A.46.** a) Avem :

$$P(X) = X^5(X^3 - 1) - (X^3 - 1) = (X^3 - 1)(X^5 - 1) =$$
$$= (X - 1)(X^2 + X + 1)(X - 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) =$$
$$= (X - 1)^2 (X^2 + X + 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1),$$

deci este divizibil cu $Q(X)$.

b) $(x - 1)^2 \geq 0$, pentru oricare $x \in \mathbf{R}$.

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \text{ oricare ar fi } x \in \mathbf{R}.$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)2 + \left(\left(\frac{3}{2}\right)x + \frac{1}{3}\right)^2 \geq \frac{2}{3},$$

oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Deci $P(x) \geq 0$ pentru oricare $x \in \mathbf{R}$ și, evident, $P^n(x) > 0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}^*$.

**VIII.A.47.** a) Pentru $n = 2$, $P(X) = (X^2 + X + 1)^2 - X^4$ iar $Q(X) = X + 1$. Avem $P(X) = [X(X + 1) + 1]^2 - X^4$ sau .

$$P(X) = [X(Q(X)) + 1]^2 - X^4 = X^2Q^2(X) + 2XQ(X) + 1 - X^4 =$$
$$= Q(X)[X^2Q(X) + 2X] + 1 - X^4 = Q(X)R(X) + 1 - X^4 =$$
$$= Q(X)R(X) + (1 - X^2)(1 + X^2) = Q(X)R(X) - (X - 1)(X + 1)(1 +$$
$$+ X^2) = Q(X) \cdot R(X) - Q(X) \cdot (X - 1)(1 + X^2) = Q(X) \cdot S(X).$$

b) Vom avea, analog :

$$P(X) = [X(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + 1) + 1]^2 - X^{2n} =$$
$$= [XQ(X) + 1]^2 - X^{2n} = Q(X) \cdot M_1(X) - (X^{2n} - 1) =$$
$$= Q(X) \cdot M_1(X) - (X^n - 1)(X^n + 1) = Q(X) \cdot M_1(X) - (X - 1)(X^n + 1) \cdot$$
$$\cdot Q(X) = Q(X) \cdot M_2(X).$$

**VIII.A.48.** $Q(X) = P^2(X) - 4P(X) + 5 - X$, dar $P(X) = X^2 - 3X + 2 - X + 3 = R(X) - (X + 3)$.

Cu aceasta,

$$Q(X) = [R(X) - (X-3)]^2 - 4[R(X) - (X-3)] + 5 - X =$$
$$= R^2(X) - 2R(X)\cdot(X-3) + (x-3)^2 - 4R(X) + 4(X-3) + 5 - X =$$
$$= R(X)\,[R(X) - 2(X-3) - 4] + X^2 - 6X + 9 + 4X - 12 + 5 - X =$$
$$= R(X)\,[R(X) - 2(X-3) - 4] + X^2 - 3X + 2 =$$
$$= R(X)\,[R(X) - 2X + 2] + R(X) = R(X)\,[R(X) - 2X + 2 + 1] =$$
$$= R(X)\,[R(X) - 2X + 3],$$

ceea ce arată că $R(X)$ divide $Q(X)$, mai mult, cîtul este $R(X) - 2X + 3$, adică $X^2 - 5X + 5$.

**VIII.A.49.** Suma coeficienților unui polinom $P(X)$ este $P(1)$. Din $Q(1) = 0$, avem $P(Q^2(1)) = P(0)$. Dar $P(0) = a_n$.

Deci suma coeficienților lui $P(Q^2(X))$ este $a_n$.

**VIII.A.50.** Din problemă avem că

$$P(X) = (X-1)\,Q(X) + r\,;$$
$$P(X) = (X-2)\,Q'(X) + r.$$

Calculînd $P(1)$ și $P(2)$ din cele două relații, obținem

$P(1) = r$ ; $\qquad P(2) = Q(2) + r$

$P(1) = -Q'(1) + r \qquad P(2) = r.$

a) Primele două relații conduc la $Q'(1) = 0$, deci $P(1) + Q'(1) = r + 0 = r$.

b) Ultimele două relații conduc la $Q(2) = 0$, deci $(X-2) \mid Q(X)$.

**VIII.A.51.** a) Pentru ca $P(X)$ să fie divizibil cu $(X - m)$ trebuie să avem $P(m) = 0$, adică $m^2 - 2(m-1)\,m + (m-1)^2 + p = 0$, deci $p = -1$. Suma coeficienților egală cu 1 implică $1 - 2(m-1) + (m-1)^2 + p = 1$ și, ținînd cont că $p = -1$, rezultă $m^2 - 4m + 2 = 0$, adică $(m-2)^2 - 2 = 0$, $(m - 2 - \sqrt{2})\,(m - 2 + \sqrt{2}) = 0$, deci $m_1 = 2 + \sqrt{2}$ sau $m_2 = 2 - \sqrt{2}$.

b) Deoarece $P(x) = x^2 - 2(m-1)\,x + (m-1)^2 - 1 = [x - (m-1)]^2 - 1$ și deoarece un pătrat perfect este nenegativ, rezultă $P(x) \geqslant -1$ pentru oricare $x \in \mathbf{R}$. Deci, $P(x) < -1$ este falsă, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ și $P(x) \geqslant -1$ este adevărată, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

**VIII.A.52.** Suma coeficienților unui polinom este $P(1)$. În cazul nostru avem $P(1) = a(1-b)\,(-1)^{k+2} + 1$, sumă care, pentru $k$ par, devine : $P(1) = -2a - b + ab + 1$, iar pentru $k$ impar $P(1) = 2a + b - ab + 1$.

În ambele cazuri, $P(1)$ trebuie să fie 0. Valorile lui $a$ și $b$ întregi pentru care $P(1) = 0$, $k \in \mathbf{N}$, le obținem intersectînd soluțiile întregi ale ecuațiilor :

$$-2a - b + ab + 1 = 0 \tag{1}$$

și

$$2a + b - ab + 1 = 0. \tag{2}$$

Rezolvăm (1) $a(b-2)=b-1$, $a=\dfrac{b-1}{b-2}$ și trebuie să găsim $b \in \mathbf{Z}$, astfel ca $a \in \mathbf{Z}$.

Avem $a=\dfrac{b-1}{b-2}=\dfrac{b-2+1}{b-2}=1+\dfrac{1}{b-2}$ care este întreg dacă $\dfrac{1}{b-2}$ este întreg, adică $b-2=\pm 1$, de unde $b=3$ sau $b=1$.

Pentru $b=3$, avem $a=2$, iar $b=1$, avem $a=0$, deci perechile $(2, 3)$ și $(0, 1)$.

Rezolvînd asemănător ecuația $2a+b-ab+1=0$, obținem perechile $(-2, 1)$ $(0, -1)$, $(2, 5)$ și $(4, 3)$.

Cum în cele două mulțimi de soluții nu sînt elemente comune, rezultă că suma coeficienților nu poate fi zero, pentru orice $k \in \mathbf{N}$.

**VIII.A.53.** Efectuăm împărțirea primului polinom prin al doilea, punînd condiția ca restul să fie nul.

$$\begin{array}{l|l} X^4+4aX^3+bX^2+4cX+d & X^3+3aX^2+3bX+c \\ -X^4-3aX^3-3bX^2-cX & \overline{X+a} \\ \hline \quad aX^3+3bX^2+3cX+d & \\ \quad -aX^3-3a^2X^2-3abX-ac & \\ \hline \quad 3(b-a^2)X^2+3(c-ab)X+(d-ac) & \end{array}$$

Din identificarea restului cu polinomul nul se obțin relațiile:

$$b-a^2=0,\ c-ab=0,\ d-ac=0, \text{ de unde } b=a^2,\ c=a^3,\ d=$$
$$=a^4 \text{ și avem}: X^3+3aX^2+3bX+c=$$
$$=X^3+3aX^2+3a^2X+a^3=(X+a)^3 \text{ și}$$
$$X^4+4aX^3+6bX^2+4cX+d=$$
$$=(X^3+3aX^2+3bX+c)(X+a)=(X+a)^3(X+a)=(X+a)^4,$$

ceea ce demonstrează afirmațiile problemei.

**VIII.A.54.** Din punctul a) rezultă $P(1)=3$. Calculînd $P(3)$ din b), obținem $P(3)+3P(3)=4$, de unde $P(3)=1$.

Scriem împărțirea cu rest a lui $P(X)$ la $X^2-4X+3=(X-1)(X-3$; $P(X)=(X-1)(X-3)Q(X)+mX+n$, unde restul este $mX+n$, de grad mai mic decît gradul împărțitorului, deci mai mic decît 2. Calculînd, pe rînd, $P(1)$ și $P(3)$ din relația obținută, rezultă sistemul

$$\begin{cases} P(1)=m+n \\ P(3)=3m+n \end{cases}$$

cu soluția $m=-1$ și $n=4$, deci restul căutat este $-X+4$.

**VIII.A.55.** Ştim că restul împărţirii unui polinom $P(X)$ la $X - a$ este $P(a)$. Avem, deci,

$P(3) = -2$

$P(-1) = -2$ sau

$$2\cdot 3^3 - m\cdot 3^2 + n\cdot 3 - 16 = -2$$

$$2\cdot(-1)^3 - m(-1)^2 + n(-1) - 16 = -2 .$$

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} -9m + 3n = -40 \\ -m - n = 16 \end{cases}$$

cu soluţia $m = -\frac{2}{3}$ ; $n = -\frac{46}{3}$, iar $P(X) = 2X^3 + \frac{2}{3}X^2 - \frac{46}{3}X - 16.$

Restul împărţirii la $X - 1$ este $P(1) = -\frac{86}{3}$.

**VIII.A.56.** Prima condiţie se scrie $P(1) = 3$. Din a doua, pentru $x = 1$, se obţine $0\cdot P(1) + 1\cdot P(3) = 1$, deci $P(3) = 1$. Scriem acum relaţia ce exprimă împărţirea cu rest a lui $P(X)$ la $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$, $P'(X) = (X - 1)(X - 3)Q(X) + mX + n$.

Pentru $x = 1$ şi $x = 3$ se obţine sistemul :

$$\begin{cases} m + n = P(1) = 3 \\ 3m + n = P(3) = 1 \end{cases}$$

cu soluţia $m = -1$, $n = 4$, deci restul căutat este binomul $-X + 4$.

**VIII.A.57.** Restul căutat este

$$P(1985) = 1985^4 - 1986\cdot 1985^2 + 1987\cdot 1985^2 - 1988\cdot 1985 + 1986.$$

Pentru a calcula mai uşor acest rest luăm : $a = 1984$ şi avem :

$$P(1985) = (a + 1)^4 - (a + 2)(a + 1)^3 + (a + 3)(a + 1)^2 -$$
$$- (a + 4)(a + 1) + a + 2 = a^2 = 1984^2.$$

b) Restul împărţirii lui $P(X) + a$ la $X - 1985$ este restul împărţirii lui $P(X)$ la 1985 adunat cu $a$.

Deci, $1984^2 + a = 1986^2$, de unde :

$$a = 1986^2 - 1984^2 = (1986 - 1984)(1986 + 1984) = 2\cdot 3970 = 7940.$$

**VIII.A.58.** Din condiţiile problemei, $P(-2) = 53$ şi $P(1) = 2$. Scriem relaţia care exprimă împărţirea lui $P(X)$ la $Q(X) = (X - 2)(X - 1)$.

$P(X) = (X + 2)(X - 1)\cdot C(X) + mX + n$.

Din $P(-2)$ şi $P(1)$ obţinem :

$$\begin{cases} -2m + n = P(-2) = 53 \\ m + n = P(1) = 2 \end{cases}$$

cu soluţia $m = -17$, $n = 19$.

Deci, restul căutat este binomul $-17X + 19$.

**VIII.A.59.** Aplicînd teorema împărţirii cu rest cu notaţiile $R_1(X) = 2X - 5$ şi $R_2(X) = 3X - 4$, obţinem :

(1) grad $S(X) = 2$

(2) $P(X) = S(X) \cdot C_1(X) + R_1(X)$

(3) $Q(X) = S(X) \cdot C_2(X) + R_2(X)$

Din ultimele două relaţii avem

$S(X) \mid P(X) - R_1(X)$ şi

$S(X) \mid Q(X) - R_2(X)$

Calculînd diferenţele din partea dreaptă a relaţiilor de divizibilitate de mai sus, obţinem

$P(X) - R_1(X) = (X - 3)(X^2 - 2X + 5)$ şi

$Q(X) - R_2(X) = (X - 2)(X^2 - 2X + 5)$.

Deci, $S(X) = X^2 - 2X + 5$.

**VIII.A.60.** Din teorema împărţirii polinoamelor avem

$$P(X) = C(X) \cdot (X^2 + 2X - 15) + R(X) \qquad (1)$$

$$0 \leqslant \text{gr. } R(X) < \text{gr. } (X^2 + 2X - 15) \qquad (2)$$

Din (2) avem $R(X) = aX + b$ şi (1) devine

$$P(X) = C(X) \cdot (X - 3)(X + 5) + (aX + b) \qquad (1')$$

Cum restul împărţirii lui $P(X)$ la $X - 3$ este 5, avem $P(3) = 5$ şi, analog, $P(-5) = -11$.

În (1′) facem pe rînd $x = 3$ şi $x = -5$. Vom obţine sistemul :

$$\begin{cases} 3a + b = 5 \\ -5a + b = -11 \end{cases}$$

cu soluţia $a = 2$, $b = -1$

Deci restul cerut este $2X - 1$.

**VIII.A.61.** Din teorema împărţirii polinoamelor ştim că gradul restului este mai mare sau egal cu zero, dar mai mic decît gradul împărţitorului. Cum împărţitorul este $X^2 - 5$, avem cîtul şi restul de forma : $aX + b$.

Tot din teorema împărţirii avem :

$P(X) = (X^2 - 5)(aX + b) + aX + b$

Afectuînd calculele obţinem : $P(X) = aX^3 + bX^2 - 4aX - 4b$.

Calculăm $P(k) + P(-k)$ şi obţinem $2bk^2 - 8b$.

Din $P(k) + P(-k) = 4k^2 - 16$ pentru orice $k \in \{-2, 0, 2\}$ şi $P(k) + P(-k) = 2bk^2 - 8b$, deducem : $2b = 4$, $8b = 16$, adică, $b = 2$, iar termenul liber al lui $P(X)$ este $-4b$, adică $-8$.

**VIII.A.62.** a) Se poate efectua împărţirea celor două polinoame, dar se poate proceda şi astfel :

$$P(X) = mX^{11} - mX^2 + X^2 + X + 1 =$$
$$= mX^2(X^9 - 1) + (X^2 + X + 1) =$$
$$= mX^2(X^3 - 1)(X^6 + X^3 + 1) + (X^2 + X + 1) =$$
$$= mX^2(X - 1)(X^2 + X + 1)(X^6 + X^3 + 1) + (X^2 + X + 1) =$$
$$=(X^2 + X + 1)[mX^2(X - 1)(X^6 + X^3 + 1) + 1].$$

Se observă că $(X^2 + X + 1) \mid P(X)$.

Deci, restul împărţirii lui $P(X)$ la $(X^2 + X + 1)$ este 0.

b) Avem încă din relaţia obţinută

$P(3) = (3^2 + 3 + 1)[m \cdot 3^2(3 - 1)(3^6 + 3^3 + 1) + 1] = M_{13}$, pentru orice $m \in \mathbf{Z}$.

**VIII.A.63.**

$$P(X^5) = (X^5)^4 + (X^5)^3 + (X^5)^2 + X^5 + 1 =$$
$$= X^{20} + X^{15} + X^{10} + X^5 + 1 =$$
$$= X^{15}(X^5 + 1) + X^5(X^5 + 1) + 1 =$$
$$= (X^5 + 1)(X^{15} + X^5) + 1 =$$
$$= (X + 1)(X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)(X^{15} + X^5) + 1 =$$
$$= (X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)[(X + 1)(X^{15} + X^5)] + 1 =$$
$$= (X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)(X^{16} + X^{15} + X^6 + X^5) + 1.$$

Deci, cîtul împărţirii este $X^{16} + X^{15} + X^6 + X^5$, iar restul, 1.

**VIII.A.64.** Dacă polinomul $P(X)$ are gradul trei şi se divide cu $X^2 + X - 2$, atunci cîtul este de gradul întîi şi avem :

$P(X) = (aX + b)(X^2 + X - 2)$ sau,

$P(X) = aX^3 + (a + b)X^2 + (b - 2a)X - 2b.$

Împărţim $P(X)$ la $X^2 + 2X - 8$

$$\begin{array}{l|l} \phantom{-}aX^3 + (a + b)X^2 + (b - 2a)X - 2b & X^2 + 2X - 8 \\ \cline{2-2} -aX^3 - 2aX^2 + 8aX & aX + (b - a) \\ \cline{1-1} \phantom{-}(b - a)X^2 + (b + 6a)X - 2b & \\ -(b - a)X^2 - (2b - 2a)X + 8b - 8a & \\ \cline{1-1} \phantom{-(b - a)X^2 -}(8a - b)X + 6b - 8a & \end{array}$$

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} 8a - b = 22 \\ -8a + 6b = -12, \end{cases}$$ cu soluţia $a = 3,\ b = 2$,

iar $P(X) = 3X^3 + 5X^2 - 4X - 4.$

**VIII.A.65.** a) Facem împărțirea cu schema lui Horner :

| | 1 | 0 | 0 | 0 | ... | 0 | −1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 0 |

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{Q(X)}$ $\underbrace{\quad}_{R}$

Deci, cîtul căutat este $Q(k) = X^{k-1} + X^{k-2} + X^{k-3} + \ldots + X + 1$.

b) Notînd, ca mai sus, polinomul $X^{k-1} + X^{k-2} + \ldots + X + 1 = Q(X)$, avem

$$P(X) = [XQ(X) + 1]^3 - X^{2k} =$$
$$= X^3Q^3(X) + 3X^2Q^2(X) + 3XQ(X) + 1 + X^{2k} =$$
$$= Q(X)[X^3Q^2(X) + 3X^2Q(X) + 3X] - (X^k - 1)(X^k + 1) =$$
$$= Q(X)[X^3Q^2(X) + 3X^2Q(X) + 3X] - (X - 1)Q(X)(X^k + 1) =$$
$$= Q(X)[X^3Q^2(X) + 3X^2Q(X) + 3X - (X - 1)(X^k + 1)].$$

Deci, $Q(X) \mid P(X)$.

c) Avem $P(1) = (k + 1)^3 - 1$ și $P(-1) = -1$ pentru $k$ impar și zero pentru $k$ par. Obținem cazurile :

Pentru $k$ impar, $P(1) - P(-1) = (k + 1)^3$, cub perfect.

Pentru $k$ par avem $P(1) - P(-1) = (k + 1)^3 - 1$, dar $(k + 1)^3 > (k + 1)^3 - 1 > k^3$ (a doua inegalitate se verifică ușor pentru $k > 0$) și cum între $(k + 1)^3$ și $k^3$ nu există cuburi perfecte, în acest caz $P(1) - P(-1)$ nu este cub perfect.

În concluzie, $P(1) - P(-1)$ este cub perfect dacă și numai dacă $k \geqslant 3$ este număr impar.

**VIII.A.66.** a) $P(P(X)) = P^2(X) - 1 = (X^2 - 1)^2 - 1 = X^4 - 2X^2$.

b) $Q(X) = aX + b$ ; $Q(Q(X)) = aQ(X) + b = a(aX + b) + b = a^2X + ab + b$. Am obținut tot un polinom de gradul I. Vom arăta că, dacă $M(X)$ și $N(X)$ sînt polinoame de gradul I, atunci $M(N(X))$ are tot gradul I.

Fie $M(X) = aX + b$ și $N(X) = cX + d$ ; avem : $M(N(X)) = aN(X) + b = a(cX + d) + b = acX + ad + b$, adică un polinom de gradul I. Cu aceasta deducem că, ori de cîte ori am calcula $Q(Q(X))$, obținem un polinom de gradul I.

c) $R(X) = X + 1986$.

**VIII.A.67.** a) Aplicînd formula $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, polinomul se scrie succesiv :

$$P_{m,\,n}(X) = (mX + n + nX + m)(mX + n - nX - m) =$$
$$= [m(X + 1) + n(X + 1)][X - 1) - n(X - 1)] =$$
$$= (X + 1)(m + n)(X - 1)(m - n).$$

b) Dacă $m - n = x$, în descompunerea anterioară avem factorul $(x - 1)x(x + 1)$, adică produsul a trei numere întregi consecutive, care este divizibil cu 6.

c) Cum diferența dintre primul și ultimul dintre cele trei numere întregi consecutive trebuie să fie 2, obținem $(m + n) - (m - n) = 2$, adică $n = 1$ și cum $x + 1 = (m - n) + 1$, avem $x = m - 1$.

În concluzie

$$P_{m,n}(x) = (x+1)(x+2)(x-1)x = (x-1)x(x+1)(x+2),$$

deci produs de patru numere întregi consecutive, care este divizibil cu 24. Într-adevăr, produsul este evident divizibil cu 3 și 4 pe baza proprietății cunoscute, folosită la punctul a). Printre cele 4 numere apar exact două pare, dintre care exact unul este multiplu de 4. În concluzie, produsul este divizibil cu 8 și, fiind divizibil și cu 3, este multiplu de 24.

**VIII.A.68.** a) $X - a$ divide $P(X) = X^2 - 5X + 6$, dar $P(X) = (X-2)(X-3)$; deducem că $X - a$ este $X - 2$ și atunci $Q(X) = X - 3$, sau $X - a$ este $X - 3$ și atunci $Q(X) = X - 2$.

Deci, $D(X) = X^2 - 5X + 6 - X + 3 = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$, deci $X - b$ este $X - 3$, sau $D(X) = X^2 - 5X + 6 - X + 2 = X^2 - 6X + 8(X-2)(X-4)$, deci $X - b$ este $X - 2$ sau $X - 4$.

b) $S_{min} = f(0) + f(1) + \ldots + f(1986) = (-1) + (-1) + \ldots + (-1) = -1987,$

$S_{max} = f(0) + f(1) + \ldots + f(1986) = (+1) + (+1) + \ldots + (+1) = +1987.$

Dacă $f(0)f(1)\ldots f(1986) \neq 0$ înseamnă că, $(\forall)\ n \in \{0, 1, 2, . \quad 1986\}$, $f(n) \neq 0$, adică funcția nu ia valoarea zero.

În suma $S = f(0) + f(1) + \quad + f(1986)$ avem 1987 termeni. Pentru ca $S = 0$, trebuie să avem un număr egal de $-1$ și $+1$, lucru imposibil, deoarece avem un număr impar de termeni.

**VIII.A.69.** a) Avem :

$$P(X, Y) = (X^2 - Y^2)(X^2 + Y^2) - 2XY(X^2 - Y^2) - (X^2 - Y^2) =$$
$$= (X^2 - Y^2)(X^2 + Y^2 - 2XY - 1) = (X-Y)(X+Y)[(X-Y)^2 - 1] =$$
$$= (X-Y)(X+Y)(X-Y-1)(X-Y+1).$$

Deci, pentru $P(X, Y) = 0$, rezultă $Y = X$, sau $Y = -X$, sau $Y = X - 1$, sau $Y = X + 1$ și cum $X \in Q$, am avea $Y \in Q$, contradicție, de unde soluția problemei.

b) Observăm că pentru $x = 0$, primul produs din expresie devine egal cu cel de-al doilea, factor cu factor, în aceeași ordine. Căutăm $x$ pentru care primul produs să aibă chiar factorii de la al doilea, cu semne schimbate, în ordine inversă, deci $X + 1 = -1985$, $X = -1986$.

Cum numărul factorilor din fiecare produs este impar, avem :

$$P(-1986) = (-1985)(-1984)\ldots(-1) + (1)(2)\ldots(1985) =$$
$$-1\cdot2\cdot3\cdot \quad \cdot1985 + 1\cdot2\cdot3\cdot \quad \cdot1985 = 0.$$

Deci $P(X)$ este divizibil cu $(X + 1986)$, deci este reductibil.

**VIII.A.70.** a) Notăm $n^3 + 3n^2 + n = y$ și avem

$$N = y(y+2) + 1 = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2.$$

Revenind, deducem

$N = (n^3 + 3n^2 + n + 1)^2$, deci pătrat perfect.

b) Din analiza domeniilor de definiţie ale celor două funcţii este evident că $A$ nu aparţine graficului funcţiei $f$. Ca să aparţină graficului funcţiei $g$ trebuie ca $g(1) = 2$.

Cum $g(1) = -1 + 3 = 2$, avem $A \in G_g$.

Inecuaţia are sens pentru acele valori pentru care se poate calcula şi $f(x)$ şi $g(x)$, adică pentru $x \in D_f \cap D_g$, unde $D_f$ şi $D_g$ sînt domeniile de definiţie ale lui $f$, respectiv $g$. $D_f \cap D_g = (1, 7] \cap [-10, 2] = (1, 2]$. Rezolvăm inecuaţia prin semnul funcţiei de gradul I.
Formăm tabelul

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | − − | − | 0 | + | + | + + | + |
| $g(x)$ | + + | + | + | + | 0 | − − | − − |
| $\frac{f(x)}{g(x)}$ | − | − | 0 | + | \| | − − | − − |

Deducem că $x \in [-1, 3)$, soluţie care trebuie intersectată cu $[1, 2]$ de unde obţinem soluţia finală $x \in [1, 2]$.

**VIII.A.71.** Avem :

$$F = \frac{3^{n+1}\cdot 5^n + 3^n\cdot 5^{n+2} + 6\cdot 3^n\cdot 5^n}{4^n\cdot 2\cdot 3^n + 3^{n+1}\cdot 4^n + 4^n\cdot 4\cdot 3^{n+1}} = \frac{3^n\cdot 5^n\cdot(3+25+6)}{4^n\cdot 3^n\cdot(2+3+12)} =$$

$$= \frac{3^n\cdot 5^n\cdot 34}{4^n\cdot 3^n\cdot 17} = \frac{3^n\cdot 5^n\cdot 2}{4^n\cdot 3^n} = \frac{5^n\cdot 2}{4^n} = \frac{5^n}{2^{2n-1}}.$$

**VIII.A.72.** Descompunem în factori numărătorul şi numitorul şi avem fracţia $f = \dfrac{(n^2-2)(n-3)}{(n^2+2)(n+3)}$.

a) Dacă $n = 2k$, atunci $n^2 = 4k^2$ sau $n^2 = 21$, şi deci $n^2 - 2$ şi $n^2 + 2$ sînt multipli de 2, adică $f$ este reductibilă.

b) Dacă $n = 2k + 1$, atunci $n - 3$ şi $n + 3$ sînt multipli de 2, deci $f$ este reductibilă.

**VIII.A.73.** a) :

$$F(X) = \frac{2(X^2+8X-9)}{X^2+5X-6} = \frac{2[(X^2+9X-(X+9)]}{X^2+6X-(X+6)}.$$

$$F(X) = \frac{2(X-1)(X+9)}{(X-1)(X+6)} = \frac{2(X+9)}{X+6}.$$

b) $F(x) = \frac{2x+18}{x+6} = 2 + \frac{6}{x+6}$, care este număr întreg dacă $x+6$ divide pe 6.

Cum divizorii lui 6 sînt $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 6$, avem ecuațiile: $x+6=1$, $x+6=-1$, $x+6=2$, $x+6=-2$, $x+6=3$, $x+6=-3$, $x+6=6$, $x+6=-6$.

De aici deducem $x \in \{-5, -7, -4, -8, -3, -9, 0, -12\}$.

**VIII.A.74.** a)

$$F(X) = \frac{X^3 - 10X^2 - X + 10}{X^2 - 9X - 10} = \frac{X(X^2-1) - 10(X^2-1)}{(X+1)(X-10)} =$$

$$= \frac{(X^2-1)(X-10)}{(X+1)(X-10)} = \frac{(X-1)(X+1)(X-10)}{(X+1)(X-10)} = X - 1.$$

b) Deoarece, pentru $x \in \mathbf{Z} \setminus \{-1 ; 10\}$ avem $F(x) = x - 1$ și $x$ este de paritate contrară lui $x - 1$, rezultă afirmația cerută.

**VIII.A.75.** a):

$$F(X) = \frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 7X - 10}{X^2 + 4X - 5} = \frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 7X - 10}{(X-1)(X+5)}.$$

Descompunerea numărătorului ne interesează numai dacă conține factorii $X - 1$ sau $X + 5$. Pentru aceasta trebuie să stabilim cu care din cele două binoame se divide numărătorul. Avem:

$$\frac{X^4 + 7X^3 + 9X^2 - 10}{X - 1} = X^3 + 8X^2 + 17X + 10.$$

Pentru divizibilitatea cu $X + 5$ încercăm cu polinomul $X^3 + 8X^2 + 17X + 10$. Rezultă $X^2 + 3X + 2$.

$$F(X) = \frac{(X-1)(X+5)(X^2+3X+2)}{(X-1)(X+5)} = X^2 + 3X + 2.$$

b) Pentru orice $x \in \mathbf{Z} \setminus \{-5, 1\}$, $F(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$. Cum $x+1$ și $x+2$ sînt numere întregi consecutive, iar produsul a două numere consecutive se divide cu 2, rezultă că $F(x) = 2k$, adică număr par.

**VIII.A.76.** a) Pentru ca o fracție să existe, numitorul trebuie să fie diferit de zero. Vom afla valorile pentru care numitorii sînt zero.

Avem, deci:

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ sau $(x-1)^3 = 0$, deci $x = 1$;

$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ sau $x^2(x-1) - (x-1) = 0$ sau $(x-1)^2(x+1) = 0$, deci $x = 1$ sau $x = -1$;

$x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$ sau $x^4 - 1 - 2x(x^2-1) = 0$;

$(x^2-1)(x^2+1)-2x(x^2-1)=0$ ;

$(x^2-1)(x^2+1-2x)=0$ ;

$(x^2-1)(x-1)^2=0$ ;

$(x-1)^3(x+1)=0$, deci $x=1$ sau $x=-1$ ;

$x=0\left(\text{din } \frac{4}{x}\right)$, iar din $x+4+\frac{4}{x}=0$ avem $x^2+4x+4=0$ sau $(x+2)^2=0$, adică $x=-2$.

Deducem că expresia nu există dacă $x \in \{-2, -1, 0, 1\}$.

b) Folosind descompunerile de la punctul a) avem :

$$E=\frac{x}{(x-1)^3}+\frac{x}{\frac{(x-1)^2(x+1)-(2+x-x^3)}{(x-1)^3(x+1)}}\cdot 6\frac{\frac{x^2-2x+1}{x}}{\frac{x^2+4x+4}{x}}=$$

$$=\frac{x^2+x(x-1)-2-x+x^3}{(x-1)^3(x+1)}\cdot\frac{6(x-1)^2}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{x^3+2x^2-x-2}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{6}{(x+2)^2}=\frac{[x^2(x+2)-(x+2)]}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{6}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{6(x+2)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+2)^2}=\frac{6}{x+2}.$$

c) $E$ are valori întregi dacă $x+2$ divide pe 6 ; cum divizorii lui 6 sînt $\pm 1$, $\pm 2$, $\pm 3$, $\pm 6$, avem $x \in \{-8, -5, -4, -3, -1, 0, 1, 4\}$.

**VIII.A.77.** b) Avem relația (1) : $f(x-2)=3x-5-f(1)$.

Punctul $B(1, 3)$ aparține graficului funcției dacă $F(1)=3$.

În (1) facem $x=3$ și avem $f(1)=9-5-f(1)$, $2f(1)=4$, $f(1)=2$, deci $B$ nu aparține graficului lui $f$.

Înlocuim în (1), $f(1)=2$ avem (2) : $f(x-2)=3x-7$ ; $A(0, 1)$ aparține graficului lui $f$ dacă $f(0)=-1$.

În (2) facem $x=-2$ și obținem $f(0)=-1$, deci $A$ aparține graficului $f$. Pentru $C(2, 5)$ trebuie să avem $f(2)=5$.

În (2) luăm $x=4$ și, deci, $f(2)=5$ adică $C$ aparține graficului lui $f$.

**VIII.A.78.** a) Fracția se simplifică cu $X-1$ dacă și numai dacă numărătorul și numitorul se divid cu $X-1$. Din teorema lui Bézout, $N(X)$ se divide cu $X-1$ dacă și numai dacă $N(1)=0$. Dar $N(1)=1+m^2+(m+1)+4m+1-3=m^2+5m=0$, $m(m+5)=0$, $m_1=0$, $m_2=-5$.

b) $F(X)$ se simplifică cu $x^2-1 \Leftrightarrow N(x)$ se divide cu $x-1$ și $x+1$. Din a), $N(x)$ se divide cu $x-1$, de unde $m=0$ sau $m=-5$. Vom arăta că pentru $m=0$ sau $m=-5$, $N(x)$ nu se divide cu $x+1$. 1) Pentru $m=0$, $N(x)=x^4+x^2+x-3$ ; $N(-1)=1+1-1-3=-2$. 2) Pentru $m=-5$, $N(x)=x^4+25x^3-4x^2-19x-3$ ; $N(-1)=1-25-4+19-3=-12$.

**VIII.A.79.** a) Dacă $F(X)$ se simplifică prin $X^2 - 3X + 2$, atunci şi numărătorul şi numitorul sînt divizibile cu acesta. $(X^4 - 6X^3 + nX + mX - 8) : (X^2 - 3X + 2)$ dă cîtul $X^2 - 3X + (n - 11)$ şi restul $(m + 3n - 27)X + 14 - 2n$. Acest rest va fi 0 dacă şi numai dacă $n = 7$, $m = 6$. Numitorul, împărţit la $X^2 - 3X + 2$, dă cîtul $X - 3$ şi restul $(p - 11)X$, de unde $p = 11$. Înlocuind $m, n, p$ avem :

$$F(X) = \frac{X^4 - 6X^3 + 7X + 6X - 8}{X^3 - 6X^2 + 11X - 6} = \frac{(X+1)(X-4)}{X-3}$$

b) $F(x) \cdot \frac{1}{x-4} = \frac{x+1}{x-3}$, care trebuie să aparţină lui **Z**. Dar $\frac{x+1}{x-3} = 1 + \frac{4}{x-3}$, deci $\frac{x+1}{x-3} \in \mathbf{Z} \iff \frac{4}{x-3} \in \mathbf{Z}$, adică $x \in \{-1, 2, 4, 5, 7\}$. Deci $A = \{-1, 1, 2, 4, 5, 7\}$.

**VIII.A.80.** a) $E(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$

b) Deoarece valorile lui $E(x)$ se pot calcula pentru orice număr real, în afară de $\pm 1$, vom avea : $g : \mathbf{R} \setminus \{-1, +1\} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$.

**VIII.A.81.** a) Polinomul, avînd coeficienţii întregi, căutăm factori de forma $(X - a)$ cu $a$ divizor al termenului liber. Găsim $a = 1, 3, 4$ iar, în final, $P(X) = (X-1)(X-3)(X-4)$.

b) Rădăcinile ecuaţiei $P(x) = 0$ sînt 1, 3, 4. Deci $A = \{1, 3, 4\}$.

c) Avem $x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

d) $E(x) = \frac{3x^2 - 12x + 19}{x^2 - 4x + 5} = 3 + \frac{4}{(x-2)^2 + 1}$, deci putem lua $m = 3$, $n = 4$ şi $p = 1$.

e) Avem, conform punctului c), $x^2 - 4x + 5 \geq 1$, deci

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 5} \leq 1, \text{ de unde } 3 + \frac{4}{x^2 - 4x + 5} \leq 7,$$

deci $E(x) \leq 7$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În plus, $\frac{4}{x^2 - 4x + 5} > 0$, de unde $E(x) > 3$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$. În concluzie, $E(x) \in [3, 7]$, oricare ar fi $x$ real.

f) Conform punctului d), $E(x) = 3 + \frac{4}{(x-2)^2 + 1}$. Din $E(x) \in \mathbf{Z}$ avem : $\frac{4}{(x-2)^2 + 1} \in \mathbf{Z}$. Deoarece $(x-2)^2 + 1$ este nenegativă, oricare ar fi $x \in \mathbf{Z}$, atunci $(x-2)^2 + 1$ trebuie să fie divizor pozitiv al lui 4. Rezolvînd în **N** ecuaţiile obţinute, avem $B = \{1, 2, 3\}$.

**VIII.A.82.** Avem succesiv :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\ \cdot$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\ \sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1.$$

**VIII.A.83.** Numărul $2\sqrt{3}$ este număr irațional. Pentru ca $p$ să fie natural trebuie ca $2\sqrt{3}$ să se reducă. De aici avem $3n+6=12$, sau $n=2$ și $(-1)(3k+1)=1$ echivalent cu $l=3k+1$, număr par ; cum $k\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, avem, pentru $k=0,\ l=1$ ; $k=1,\ l=4$ ; $k=2,\ l=7$ ; $k=3,\ l=10$ ; $k=4,\ l=13$ ; $k=5,\ l=16$. Avem, deci, perechile : (1, 2), (3, 2), (5, 2).

**VIII.A.84.** Întrucît $4-\sqrt{15}>0$ și $\sqrt{6}<\sqrt{10}$, rezultă $a>0,\ b<0$. Calculînd pătratele numerelor date, obținem : $a^2=4(4-\sqrt{15})$ și $b^2=$ $=16-2\sqrt{4\cdot 15}=4(4-\sqrt{15})$, deci $a^2=b^2$, deci $a=b$, sau $a=-b$. Cum $a$ și $b$ au semne contrare, rămîne $a=-b$.

**VIII.A.85.** Demonstrăm prin reducere la absurd. Să presupunem că $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{p}{q}$, unde $p,\ q\in\mathbf{N},\ q\neq 0$ și să presupunem fracția $\frac{p}{q}$ ireductibilă. Prin ridicare la pătrat rezultă $a^2+b^2=\frac{p^2}{q^2}$, unde $\frac{p^2}{q^2}$ este ireductibilă, deci $q=1$, $a^2+b^2=p^2$ ; dar $a$ și $b$ sînt impare, rezultă $p$ par și am avea $(M_2+1)^2+(M_2+1)^2=(M_2)^2$, deci $2=M_4$, contradicție. În concluzie, $\sqrt{a^2+b^2}\notin Q$ în condițiile problemei.

**VIII.A.86.** Deoarece $3k+1 \mid 3k^2+2k-3$ și $3k+1 \mid k(3k+1)=3k^2+$ $+k$, rezultă $3k+1$ divide $(3k^2+2k-3)-k(3k+1)=k-3$. Dar atunci $3k+1 \mid 3(k-3)$, de unde $3k+1 \mid 10$. De aici, $k\in\{0,\ -1,\ -2,\ 3\}$, celelalte valori neconvenind condiției $k\in\mathbf{Z}$.

O altă metodă considerăm fracția $\frac{3k^2+2k-3}{3k+1}=k+\frac{1}{3}-$ $-\frac{10}{3(3k+1)}$. Rezultă $3k+1$ divide pe 10, deci $k\in\{-2,\ -1,\ 0,\ 3\}$. Verificînd, se constată că pentru fiecare $k$ din intervalul dat, $3k+1$ divide $3k^2+2k-3$.

**VIII.A.87.** Notăm $1981 = a$ şi avem $a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$. Căutăm un divizor de gradul 2, $P(a) = a^2 + ka + 1$, cu $[P(a)]^2 = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$, adică $a^4 + 2ka^3 + (k^2 + 2)a^2 + 2ka + 1 = a^4 + 6a^3 + 11a^2 + 6a + 1$. Putem lua $k = 3$ şi avem $a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+3a+1)^2$. Luînd $a = 1981$, obţinem un pătrat perfect.

**VIII.A.88.** Avem, succesiv :

$$A = 5^{n+1}\cdot 2^{n+2} + 3^{n+2}\cdot 2^{n+1} =$$

$$= 25^n\cdot 2^n\cdot 20 + 3^n\cdot 4^n\cdot 18 = 50^n\cdot(19+1) + 12^n\cdot(19-1) =$$

$$= 19\cdot 50^n + 19\cdot 12^n + 50^n - 12^n\cdot 19\cdot 50^n + 19\cdot 12^n +$$

$$+ (50-12)(50^{n-1} + 50^{n-2}\cdot 12 + \ldots + 12^{n-1}) = M19.$$

**VIII.A.89.** Numărul $p$ se divide cu 5 dacă are ultima cifră 0 sau 5. Ultima cifră a lui $1985^n$ este 5, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. Ultima cifră a lui $1984^n$ este 4, dacă $n = 2k+1$ şi 6, dacă $n = 2k$. Vom avea, deci pentru $n = 2k$, $p = \overline{\ldots 5} + \overline{\ldots 6} + x = \overline{\ldots 1} + x$. Cum ultima cifră trebuie să fie zero sau 5, deducem $x = 4$, sau $x = 9$. Pentru $n = 2k+1$, $p = \overline{\ldots 5} + \overline{\ldots 4} + x = \overline{\ldots 9} + x$ ; rezultă $x = 1$, sau $x = 6$.

**VIII.A.90.** Putem scrie :

$$A = (2903^n - 803^n) - (464^n - 261^n) =$$

$$= M_{(2903-803)} - M_{(464-261)} = M_7 - M_7 = M_7 \quad \text{şi, apoi,}$$

$$A = (2903^n - 464^n) - (803^n - 261^n) = M_{(2903-464)} - M_{(803-261)} =$$

$$= M_{271} - M_{271} = M_{271}.$$

Cum 7 şi 271 sînt prime între ele rezultă că $A$ este multiplu de $7\cdot 271 = 1897$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$.

**VIII.A.91.** Determinăm mulţimea $A$.

$$\frac{3x+2}{x-2} = \frac{3x-6+8}{x-2} = 3 + \frac{8}{x-2}, \text{ deci } \frac{3x+2}{x-2} \in \mathbf{Z}, \text{ dacă } \frac{8}{x-2} \in \mathbf{Z},$$

adică dacă $x-2=1$, $x-2=-1$, $x-2=2$, $x-2=-2$, $x-2=4$, $x-2=-4$, $x-2=8$, $x-2=-8$, cu soluţiile naturale aparţinînd mulţimii $A = \{0, 1, 3, 4, 6, 10\}$. Asemănător avem $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 13\}$, deci $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13\}$, $A \cap B = 3, 4\}$ şi $A \setminus B = \{0, 1, 6, 10\}$.

**VIII.A.92.** Scoatem $y$ din ecuaţie : $y = -1 + \frac{180}{x^2}$; y este număr natural dacă $x^2$ divide pe 180. Cum $180 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5$, deducem că $x^2 = 2^2$, sau $x^2 = 3^2$, sau $x^2 = 2^2\cdot 3^2$, de unde $x = 2$, sau $x = 3$, sau $x = 6$. Cînd $x = 2$, $y = 44$, cînd $x = 3$, $y = 19$, cînd $x = 6$, $y = 4$.

**VIII.A.93.** Se impun condițiile $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$. Efectuăm operațiile în membrul stîng. Din

$$\frac{9x-1}{x}-\frac{x+1}{x}:\frac{x(1-x)-2x}{(1-x)(1+x)}=x$$

se obține, succesiv

$$\frac{9x-1}{x}-\frac{x+1}{x}\cdot\frac{(1-x)(1+x)}{-x(x+1)}=0.$$

Simplificînd și eliminînd numitorii se obține: $10x-x^2=0 \iff x(10-x)=0$, cu soluțiile $x=0$ (nu convine) și $x=10$.

**VIII.A.94.** a) Punem condiția $x+1 \neq 0$, adică $x \neq -1$. Avem $5x^2+mx-3m=(5x-1)(x+1)$, $5x^2+mx-3m=5x^2+4x-1$, $(m-4)x=3m-1$. Pentru $m=4$ obținem $0 \cdot x=11$, ecuație fără soluții. Pentru $m \neq 4$ obținem soluția $x=\frac{3m-1}{m-4}$ Rămîne de verificat dacă, pentru un $m \neq 4$, soluția $\frac{3m-1}{m-4}$ „cade" peste valoarea interzisă $x=-1$. Avem $\frac{3m-1}{m-4}=-1$, $3m-1=-m+4$, $4m=5$, $m=\frac{5}{4}$ În concluzie, pentru $m=4$ sau $m=\frac{5}{4}$ ecuația nu are soluții, iar pentru $m \in \mathbf{R} \setminus \left\{4, \frac{5}{4}\right\}$ ecuația are o unică soluție, $x=\frac{3m-1}{m-4}$.

b) $x=\frac{3m-1}{m-4}=\frac{3m-12+11}{m-4}=\frac{3m-4)+11}{m-4}=3+\frac{11}{m-4}$

Cum $x$ este întreg și $m$ întreg, rezultă că $m-4$ este un divizor al lui 11, adică $m-4 \in \{1, -1, 11, -11\}$. Se obțin valorile $m=5$, care dă $x=14$, $m=3$, cu $x=-8$, $m=15$, cu $x=4$ și $m=-7$, cu $x=2$. Deoarece $-8 \notin \mathbf{N}$, $m=3$ nu este soluție, deci $m \in \{5, 15, -7\}$.

**VIII.A.95.** a) $(m+1)x-x=-n$, $x(m+1-1)=-n$, $mx=-n$. Dacă $m=n \neq 0$, ecuația admite ca soluție orice $x \in \mathbf{R}$. Dacă $m=0 \neq n$, ecuația nu are soluții; dacă $m \neq 0$, ecuația are o unică soluție, $x=\frac{-n}{m}$

b) Ecuația se mai scrie $\frac{(2x-3)(2x+3)}{x(2x-3)}-\frac{1-x}{x}-\frac{13}{3}=0$, cu condițiile $x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{2}$. După simplificare, obținem succesiv: $3(2x+3)-3(1-x)-13x=0$, $6x+9-3+3x-13x=0$, $-4x=-6$, $x=$

$= \frac{3}{2}$, deci ecuaţia nu are soluţie $\left(\text{din condiţia } x \neq \frac{3}{2}\right)$.

**VIII.A.96.** $a^2x - x = a^3 - 1 \Longleftrightarrow x(^2 - 1) = a^3 - 1$. Dacă $a \neq 1$ şi $a \neq -1$, atunci $x = \frac{(a-1)(a^2+a+1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a+1}{a+1}$. Cum $a \in \mathbf{Z}$, trebuie găsite valorile întregi ale lui $a$ pentru care $x$ este întreg. Avem $a+1=1$ sau $a+1=-1$, de unde $a=0$ sau $a=-2$. În concluzie, ecuaţia admite soluţii întregi în cazul $a=0$ sau $a=-2$, egale cu 1, respectiv, $-3$. Pentru $a=1$, ecuaţia admite ca soluţie orice număr întreg, pentru $a=-1$ ecuaţia nu are soluţii.

**VIII.A.97.** Folosind proprietatea că o sumă de pătrate de numere reale este nulă cînd toţi termenii sînt nuli, obţinem că ecuaţia este echivalentă cu sistemul $x^2+2x+1=0$, $x^2+3x+2=0$, $x^2+4x+3=0$, .., $x^2+1986x+1985=0$, a cărui unică soluţie este $x=-1$, unica rădăcină comună a ecuaţiilor sistemului. În general, pentru $P_1(X)$, $P_2(X), \ldots, P_n(X)$ polinoame cu coeficienţi reali neconstante, ecuaţia :

$$P_1^2(x) + P_1^2(x) + \quad + P^2(x) = 0,$$

are soluţie dacă şi numai dacă polinoamele $P_1(X)$, $P_2(X), \ldots, P_n(X)$ au rădăcină comună. În acest caz, soluţiile ecuaţiei sînt chiar rădăcinile comune ale acestor polinoame.

**VIII.A.98.** Funcţia $f$ este de forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Din condiţiile problemei avem $0 = f(1) = a + b + c$, $-2 = f(-1) = a - b + c$, $\frac{7}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c$. Formînd sistemul : $a + b + c = 0$, $a - b + c = -2$, $\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c = \frac{7}{4}$, se obţin soluţiile $a = -3$, $b = 1$, $c = 2$, deci $f(x) = -3x^2 + x + 2$.

**VIII.A.99.** Condiţiile problemei sînt : $f(a) = a(b+c)$, $f(b) = b(c+a)$, $f(c) = c(a+b)$. Obţinem sistemul : $ma^2 + na + p = a(b+c)$, $mb^2 + nb + p = b(c+a)$, $mc^2 + nc + p = c(a+b)$, cu necunoscutele $m, n, p$. Reducînd $p$ între ecuaţiile 1 şi 2 şi 1 şi 3 rezultă, $m(a+c) + n = b$, $m(b+c) + n = a$, cu soluţiile $m = -1$, $n = a+b+c$, $p = 0$, deci $f(x) = -x^2 + (a+b+c)x$.

**VIII.A.100.** Din $f(0) = 3$, condiţia a doua se retranscrie $f(2) = 5$ şi, deci, a treia devine $f(5) = 23$. Deoarece $f$ este funcţie de gradul al doilea, avem : $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Obţinem sistemul : $c = 3$, $4a + 2b + c = 5$, $25a + 5b + c = 23$, cu soluţiile $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$, deci funcţia este $f(x) = x^2 - x + 3$.

**VIII.A.101.** a) $P(X)=aX^2+bX+c$ ; $a, b, c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$.

Din $\begin{matrix} P(0)=9 \\ P(1)=1 \\ P(-1)=25 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} c=9 \\ a+b+c=1 \\ a-b+c=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=9 \\ a+b=-8 \\ a-b=16 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=9 \\ a+b=-8, \\ 2a=8 \end{cases}$ cu soluţia $a=4$, $b=-12$, $c=9$,

deci $P(X)=4X^2-12X+9=(2X-3)^2$

$Q(X)=mX^2+nX+p$ ; $m, n, p\in\mathbf{R}$, $m\neq 0$.

Din $\begin{cases} Q(0)=-3 \\ Q(1)=-2 \\ Q(-1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=-3 \\ m+n+p=-2, \\ m-n+p=0 \end{cases}$

cu soluţia $m=2$, $n=-1$, $p=-3$,
deci $Q(X)=2X^2-X-3=(X+1)(2X-3)$.

b) $\frac{1}{3}\frac{((x+1)(2x-3)}{(2x-3)^2}=\frac{1}{2}$

Condiţii $(x+1)(2x-3)\neq 0$ implică $x\neq -1$ şi $x\neq\frac{3}{2}$.

În aceste condiţii putem simplifica prin $2x-3$ ; $\frac{2x-3}{3(x+1)}=\frac{1}{2}$, de unde $4x-6=3x+3$, care conduce la $x=9$.

**VIII.A.102.** Efectuăm împărţirea lui $P(X)$ la $X+1$ prin schema lui Horner.

| | 1 | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | $a-1$ | $b-a+1$ | $c-b+a-1$ |
| | $P(x)$ | | | $R$ |

Cum $P(X)$ este divizibil cu $X+1$, rezultă $c-b+a-1=0$. Cîtul împărţirii este $P_1(X)=X^2+(a-1)X+(b-a+1)$. Cu ultimele două condiţii din enunţ, formăm sistemul

$$\begin{cases} a-b+c-1=0 \\ 1+(a-1)+(b-a+1)=2 \\ 4+2(a-1)+(b-a+1)=-1 \end{cases}$$

cu soluţia $a=-5$, $b=1$, $c=7$.

**VIIIA.103.** a)

$$\frac{P(0)}{1}=\frac{P(1)}{2}=\frac{P(2)}{3}=\frac{P(0)+P(1)+P(2)}{(1+2+3)}=1, \text{ şi deci}$$

$$(1)\quad \begin{cases} P(0)=1 \\ P(1)=2 \\ P(2)=3 \end{cases}$$

Presupunem că $P(X)$ are gradul 2, deci forma $P(X)=aX^2+bX+c$.

Sistemul (1) devine : $\begin{cases} c = 1 \\ a + b = 1 \\ 4a + 2b = 2 \end{cases}$

cu soluţia $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, ceea ce arată că $P(X)$ nu are gradul 2.

Presupunînd grad $P(X) = 0$, atunci, $P(X) = c$, dar $P(0) \neq P(1) \neq \neq P(2)$, contradicţie.

b) $P(X) : Q(X)$ dă $C(X)$ şi $R(X)$ cu proprietăţile

$$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X) \qquad (1)$$

$$0 < \text{gr. } R(X) < \text{gr. } Q(X) \qquad (2)$$

Din (2) $\Rightarrow$ $R(X) = mX^2 + nX + P$. Înlocuind în (1), $P(X) = Q(X) \cdot \cdot C(X) + mX^2 + nX + p$. Avem succesiv :

$$\begin{cases} P(0) = p \\ P(1) = m + n + p \\ P(2) = m + 2n + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ m + n = 1 \\ 2m + n = 2 \end{cases}$$

cu soluţia : $m = 0$, $n = -1$, $p = 1$.

Deci, $R(X) = -X + 1$.

**VIII.A.104.** a)

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = [(x + y + z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3) =$$
$$= [(x + y + z) - x] [(x + y + z)^2 + (x + y + z)x + x^2] -$$
$$- (y + z) (y^2 - yz + z^2) = (y + z) (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz +$$
$$+ x^2 + xy + xz + x^2) - (y + z) (y^2 - yz) = (y + z) (3x^2 + y^2 +$$
$$+ z^2 + 3xy + 3xz + 2yz) - (y + z) (y^2 - yz + z^2) = (y + z) (3x^2 +$$
$$+ 3y + 3xz + 3yz) = 3(y + z) [x(x + y) + z(x + y)] =$$
$$= 3(x + y) (y + z) (z + x).$$

b) :

$(3x + y) (y + z) (z + x) = (x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 27 = 3 = 24$, de unde $(x + y) (y + z) (z + x) = 8$, sau încă, ţinînd cont de prima ecuaţie, $(3 - x) (3 - y) (3 - z) = 8$, cu $x, y, z \in \mathbf{Z}$.

Considerînd descompunerile lui 8 în produse de cîte trei factori, avem :

$$\begin{cases} 3 - x = 8 \\ 3 - y = 3 - z = 1 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} 3 - x = -4 \\ 3 - y = -2 \text{ etc.} \\ 3 - z = 1 \end{cases}$$

Reţinînd doar tripletele $(x, y, z)$ care verifică toate ecuaţiile sistemului, obţinem soluţiile : (1, 1, 1) şi (— 5, 4, 4), precum şi cele obţinute prin permutările valorilor $x, y, z$, sistemul fiind simetric.

**VIII.A.105.** Înmulţim (1) cu 2 şi obţinem: $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz+2zx=0$, sau, încă, $(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2=0$, ceea ce conduce la $x=y=z$. (3)

Înlocuim (3) în (2) şi avem:

$$\sqrt{5}\left[\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right]^2 x+\left[\frac{\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}+1)}\right]^2 x+x=2.$$

$$\left[\frac{(4\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+1)^2}\right]x+\left[\frac{5-2\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)^2}\right]x+x=2.$$

$$\left[\frac{(4\sqrt{5}+5-2\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)^2}\right]x+x=2.$$

$$\frac{5+2\sqrt{5}+1}{5+2\sqrt{5}+1}x+x=2.$$

$$x+x=2.$$

$$2x=2.$$

$$x=1.$$

Deci, $x=y=z=1$.

**VIII.A.106.** Dacă $c=0$, atunci, din prima ecuaţie avem, fie $x=0$, de unde, cu a doua, $b=0$, deci $bz+cy=0$, contradicţie, fie $y=0$, de unde, cu a treia, $a=0$, deci $az+cz=0$, contradicţie. Analog se obţine şi pentru celelalte, deci $a, b, c\neq 0$, de unde $x, y, z\neq 0$.

Sistemul se rescrie, răsturnînd ecuaţiile:

$$\begin{cases}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{1}{c}\\[2mm] \dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{b}\\[2mm] \dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=\dfrac{1}{a}\end{cases}$$

Sumînd ecuaţiile, se obţine:

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

şi, scăzînd de aici fiecare ecuaţie în parte, rezultă

$$\frac{a}{x}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\ \frac{b}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

$$\frac{c}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right).$$

În concluzie, sistemul are soluție doar pentru $a, b, c \neq 0$, anume:

$$x = 2a\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), \quad y = 2b\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

$$z = 2c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right).$$

**VIII.A.107.** Din primele trei relații obținem $bcx - abc = 1$, $acy - abc = 1$, $abz - abc = 1$.

Înmulțind relațiile obținute cu, respectiv, 2, 3 și 4 și adunînd termen cu termen, rezultă: $2bcx + 3acy + 4abz - 9abc = 9$ și, ținînd cont de ultima relație din problemă, obținem $18 - 9abc = 9$, de unde $abc = 1$.

Înlocuind în cele trei relații obținute mai sus, rezultă $bcx = 2$, $acy = 2$, $abz = 2$ și înmulțindu-le cu, respectiv, $a, b, c$, cu $abc = 1$, găsim $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$ deci $xyz = 8abc = 8$.

**VIII.A.108.** Fie $x$ și $y$ cele două numere, cu $x > y$. Relația din problemă este: $x + y + xy + x - y + \frac{x}{y} = 450$, care se mai scrie: $2xy + xy^2 + x = 450y$, sau $x = \frac{450\, y}{(y+1)^2}$

Cum $x$ este natural, iar $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, obținem $y \in \{2, 4, 14\}$.

Perechile $(x, y)$ de numere căutate vor fi (100 ; 2), (72 ; 4), (28 ; 14).

**VIII.A.109.** Metoda I.

Ecuația se scrie, succesiv:

$$\left[x(x^2 + 3x + 2) + \frac{1}{3}\right] + x = 23,$$

$$\left[x(x + 1)(x + 2) + \frac{1}{3}\right] + x = 23.$$

Dar $x \in \mathbf{Z}$ și $x, x+1, x+2$ sînt consecutive, deci produsul lor se divide cu 3 și deci

$$x(x+1)(x+2) + \frac{1}{3} = x(x+1)\,\frac{x+2}{3}.$$

Cu aceasta, ecuația devine:

$$x(x+1)\,\frac{x+2}{3} + x = 23, \text{ sau}$$

$$x^3 + 3x^2 + 5x - 69 = 0, \text{ cu soluția întreagă } x = 3.$$

Metoda a II-a.

Ecuaţia la care s-a ajuns se poate rezolva astfel

I.

$x^3 + 3x^2 + 5x - 69 = 0$, care conduce la ecuaţia

$x(x^2 + 3x + 5) = 1 \cdot 3 \cdot 23$.

Pentru $x = 1$ nu convine.

Pentru $x = 3$ obţinem

$x^2 + 3x + 5 = 23$.

$x^2 + 3x - 18 = 0$.

$9 + 9 - 18 = 0$, relaţie adevărată.

II.

Ecuaţia se mai scrie

$x^3 - 3x^2 + 6x^2 - 18x + 23x - 69 = 0$.

$x^2(x - 3) + 6x(x - 3) + 23(x - 3) = 0$.

$(x - 3)(x^2 + 6x + 23) = 0$.

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$.

$x^2 + 6x + 23 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbf{R}$.

**VIII.A.110.** Incluziunea $\{b, c, d\} \subset (-\infty, 1]$ este echivalentă cu : $b \leq 1$, $c \leq 1, d \leq 1$.

La fel, $\{a, ab, abc\} \subset [1, \infty)$ echivalentă cu : $a \geq 1$, $ab \geq 1, abc \geq 1$.

Din $a \geq 1$ şi $b \leq 1$ avem : $(a - 1) \geq 0$ şi $(b - 1) \leq 0$, care implică $(a - 1)(b - 1) \leq 0$, sau $ab + 1 \leq a + b$, sau $ab \leq a + b - 1$ (1)

Din $ab \geq 1$ şi $c \leq 1$, deducem :

$(ab - 1)(c - 1) \leq 0$

$abc + 1 \leq ab + c$, sau, ţinînd seama de (1),

$abc + 1 \leq a + b + c - 1$ şi încă $abc \leq a + b + c - 2$ (2)

Din $abc \geq 1$ şi $d \leq 1$, deducem :

$(abc - 1)(d - 1) \leq 0$, sau

$abcd + 1 \leq abc + d$, sau, ţinînd cont de (2),

$abcd + 1 \leq a + b + c + d - 2$, de unde

$3 + abcd \leq a + b + c + d$.

**VIII.A.111.** Avem, pentru oricare $x$, $y$, $z$ numere reale, inegalitatea cunoscută $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, adevărată deoarece provine din $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$. În plus, egalitate apare doar pentru $x = y = z$.

Pentru $x = a^{2n}$, $y = b^{2n}$, $z = c^{2n}$, obținem :

$$a^{4n} + b^{4n} + c^{4n} \geq a^{2n}b^{2n} + b^{2n}c^{2n} + c^{2n}a^{2n} \quad (1)$$

Pentru $x = a^n b^n$, $y = b^n c^n$ și $z = c^n a^n$, aceeași inegalitate de la început dă

$$a^{2n}b^{2n} + b^{2n}c^{2n} + c^{2n}a^{2n} \geq a^n b^{2n} c^n + b^n c^{2n} a^n + c^n a^{2n} b^n =$$
$$= a^n b^n c^n (a^n + b^n + c^n) \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă inegalitatea enunțului.

Observăm, în plus, că egalitate apare dacă și numai dacă $a^n = b^n = c^n$, iar pentru $n$ impar, dacă $a = b = c$.

**VIII.A.112.** În condițiile problemei, $x - a = y + z$, $y - a = x - z$, $z - a = x + y$, inegalitatea din enunț devine

$$(y + z)^2 + (x + z)^2 + (x + y)^2 \geq \frac{4}{3}(x + y + z)^2$$

care, adusă la forma cea mai simplă, este

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx,$$

inegalitate pe care o vom demonstra în continuare, reducînd-o la forme echivalente :

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \geq 0$$
$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) \geq 0$$
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0,$$

care este evidentă. În plus, se observă că egalitate în ultima relație apare doar pentru $x = y = z$, deci în relația din enunț, egalitate există numai pentru $x = y = z = \frac{a}{3}$

**VIII.A.113.** Arătăm că $x = y = z$ implică :

$$xy + xz = 2yz \quad (1)$$
$$yz + xy = 2xz \quad (2)$$
$$xz + yz = 2xy \quad (3)$$

Dacă $x = y = z = A$, avem :

$$A^2 + A^2 = 2A^2 \quad (1')$$
$$A^2 + A^2 = 2A^2 \quad (2')$$
$$A^2 + A^2 = 2A^2 \quad (3')$$

Arătăm că relațiile (1), (2) și (3) implică $x = y = z$.
Scoatem $x$ din (1) :

$x = \frac{2yz}{y + z}$ (4) și, din (2),

$$x = \frac{yz}{2z - y}.$$

Egalînd cele două valori ale lui $x$, avem :

$$\frac{2yz}{y+z} = yz(2z - y).$$

Cum $y$ și $z$ sînt nenule, putem împărți prin $yz$

$\frac{2}{y+z} = \frac{1}{2z-y}$, de unde deducem $y = z$.

În (4), înlocuim pe $z$ cu $y$ și avem :

$x = \frac{2y^2}{2y}$ adică $x = y$.

Dar $x = y$ și $y = z$ implică $x = y = z$.

Observație : Pentru a doua implicație sînt suficiente relațiile (1) și (2).

CAPITOLUL I

## PUNCTE, DREPTE, PLANE

### 1. Paralelism în spaţiu

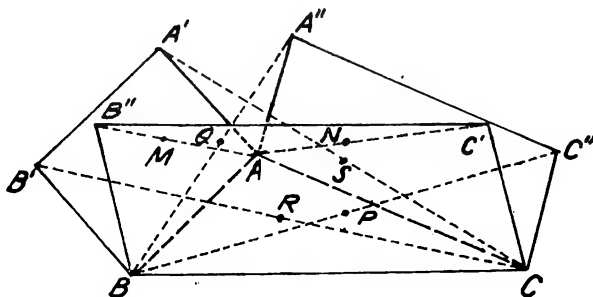



*Fig. VIII.G.1.*

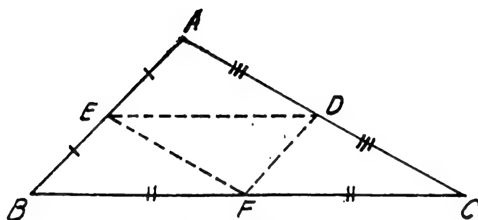



*Fig. VIII.G.1'.*

**VIII.G.1.** În $\triangle AB''C'$, $AM \equiv MB''$ şi $AN \equiv NC'$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $MN$ linie mijlocie : $MN \parallel B''C'$ şi $MN = \frac{B''C}{2}$. Cum $BCC'B''$ este paralelogram (ipoteză) $\Rightarrow$ $B''C' = BC$. (Vezi fig. VIII.G.1.)

Deci $MN = \frac{BC}{2}$. (1)

Analog, în $\triangle BA''C''$, $PQ$ este linie mijlocie $\Rightarrow PQ = \frac{AC}{2}$. (2)

Analog, în $\triangle CA'B'$, $RS$ este linie mijlocie $\Rightarrow RS = \frac{AB}{2}$. (3)

Aşadar, segmentele $MN$, $PQ$ şi $RS$ au măsurile lungimilor egale cu măsurile lungimilor laturilor triunghiului medial triunghiului $ABC$ ($\triangle EFD$ vezi fig. VIII.G.1.), deci cu aceste lungimi de segmente, se poate construi un triunghi congruent cu triunghiul medial triunghiului $ABC$.

Cum $\triangle EFD \equiv \triangle DAE \equiv \triangle CFD \equiv \triangle FBE$ ($\triangle EFD$ triunghi mediane şi deci triunghiurile sînt congruente conform L.L.L.), rezultă că aria $\triangle EFD$ este $\frac{1}{4}$ din aria $\triangle ABC$. (Vezi fig. VIII.G.1'.)

**VIII.G.2.** În $\triangle ACP$, $CF$ este bisectoare (ipoteză). Cum $CF \perp AP$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle ACP$ isoscel $\Rightarrow AF \equiv FP$. (Bisectoarea $CF$ este înălţime şi mediană.) (1)

Prelungim dreapta $AE$ şi notăm intersecţia ei cu $BD$, de exemplu, $R$.

În $\triangle ABR$, $BE$ este bisectoare (ipoteză). Cum $BE \perp AR$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ABR$ isoscel $\Rightarrow AE \equiv ER$. (Bisectoarea $BE$ este înălţime şi mediană). (2)

În $\triangle APR$, $EF$ este linie mijlocie (din (1) şi (2)) $\Rightarrow EF \parallel PR$. Cum $PR \subset BCD$ rezultă că $EF \parallel BCD$.

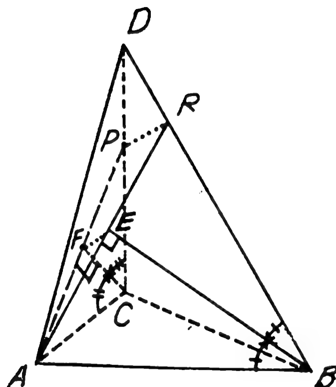



*Fig. VIII.G.2.*

**VIII.G.3.** Metoda de rezolvare — metoda contraexemplului Un contraexemplu planul β intersectează planul α după o dreaptă *b*, paralelă cu dreapta *a*, situată în planul α. Deci propoziția „planul α este paralel cu planul β", este falsă. (Vezi fig. VIII.G.3.)

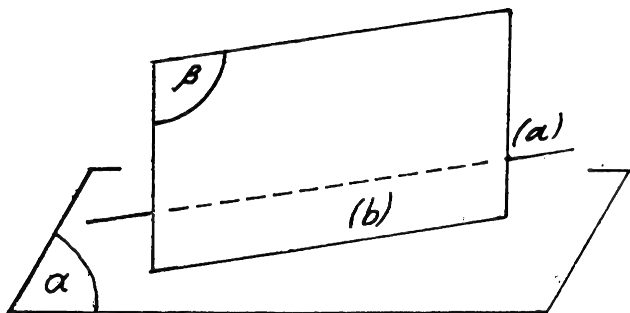



*Fig. VIII.G.3.*

**VIII.G.4.** Fie $DD'$ dreapta dusă prin $D$ și paralelă cu $AA'$. Cum $(BB'CC') \| (AA'DD')$ și $(BB'AA') \| (CC'DD')$ (ipoteză) rezultă că planul $(A'B'C')$ le intersectează pe acestea după drepte opuse paralele (dacă un plan intersectează două plane paralele atunci dreptele de intersecție dintre planul dat și planele paralele sînt două drepte paralele) și astfel poligonul de secțiune dintre $(A'B'C')$ și planele de mai sus este un paralelogram. Două dintre laturile acestui paralelogram sînt $A'B'$ și $B'C'$. Urmează să le determinăm și pe celelalte două. Procedăm astfel : Patru-

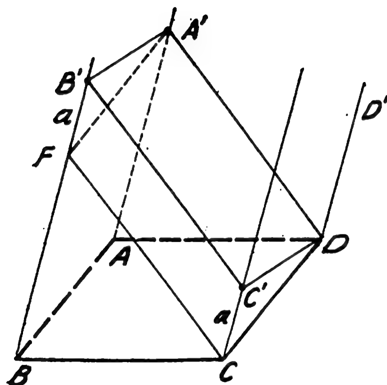



*Fig. VIII.G.4.*

laterul $B'C'CF$ (vezi fig. VIII.G.4.) este paralelogram ($B'F \parallel C'C$ — (vezi indicația) ipoteză și $B'F = C'C = a$ — construcție) $\Rightarrow B'C' \parallel FC$ și $B'C' \equiv FC$.

Patrulaterul $A'DCF$ este paralelogram deoarece $CD \parallel FA'$ și $CD \equiv \equiv FA'$ (paralelismul și congruența acestora rezultînd din faptul că $AA'BF$ este paralelogram — din construcție, și $ABCD$ este tot paralelogram — din ipoteză. Conform tranzitivității relației de paralelism și congruență, rezultă afirmația de mai sus) $\Rightarrow FC \parallel A'D$ și $FC \equiv A'D$. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow B'C' \parallel A'D$ și $B'C' \equiv A'D \Rightarrow B'C'A'D$, este paralelogram. În concluzie, celelalte două laturi ale paralelogramului de secțiune (căutat) sînt laturile $C'D$ (căci $C'D$ este paralelă și congruentă cu $B'A'$) și $A'D$ (căci $A'D$ este paralelă și congruentă cu $B'C'$).

Concluzionăm paralela dusă prin punctul $D$ la dreptele $AA'$, $BB'$, $CC'$ intersectează planul $A'B'C'$ în punctul $D$, sau planul $A'B'C'$ trece prin punctul $D$.

**VIII.G.5.** a) Se știe că o dreaptă „$a$" este paralelă cu un plan „$\alpha$", dacă în planul „$\alpha$" există o dreaptă „$b$" paralelă cu dreapta „$a$". Planul care trece prin punctul $M$ și este paralel cu dreptele $AC$ și $BD$, va conține drepte paralele cu $AC$ și $BD \Rightarrow MQ \parallel AC$ și $MN \parallel BD$. (Vezi fig. VIII.G.5.). Fie $P$ punctul în care dreapta $DC$ intersectează planul $MNQ$.

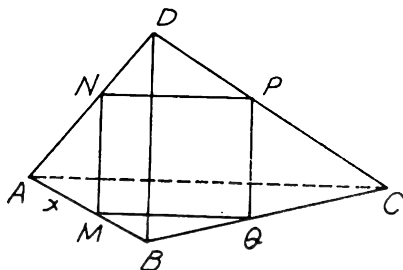


*Fig. VIII.G.5.*

Dacă $NP \nparallel MQ \Rightarrow NP \nparallel AC$ și deci dreptele $NP$ și $AC$ au un punct comun : $S \Rightarrow$ planul $MNQ$ și dreapta $AC$ au un punct comun $S$ — contradicție, deoarece $MNQ \parallel AC$ din construcție — $\Rightarrow NP \parallel MQ$.

Analog se demonstrează că $MN \parallel QP \Rightarrow MNPQ$ paralelogram (definiție).

b) În $\triangle ADB$, $MN \parallel BD$ (construcție) și conform teoremei fundamentale a asemănării $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} \Leftrightarrow \frac{X}{5} = \frac{MN}{7} \Leftrightarrow MN = \frac{7 \cdot x}{5} = QP$ (din demonstrația anterioară).

În $\triangle BAC$, $MQ \parallel AC$ (construcţie) şi conform aceleiaşi teoreme :

$$\frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{AC} \Longleftrightarrow \frac{5-x}{5} = \frac{MQ}{12} \Longleftrightarrow MQ = \frac{12(5-x)}{5} = NP \text{ (demonstrat)}. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că perimetrul paralelogramului $MNPQ$ este

$$2 \cdot \frac{7x}{5} + 2 \cdot \frac{12(5-x)}{5} = \frac{14x + 120 - 24x}{5} = \frac{120 - 10x}{5} =$$

$$= 24 - 2x = 2(12 - x).$$

Cum $0 < x < 5 \Longrightarrow 2(12 - x) > 0$ şi deci rezultatul este plauzibil.

**VIII.G.6.** Reamintim următoarele teoreme (presupuse cunoscute).

$T_1$ dacă două drepte diferite $d_1$ şi $d_2$ sînt perpendiculare pe un plan $\alpha$, atunci dreptele $d_1$ şi $d_2$ sînt paralele.

$T_2$ dacă două drepte concurente $d_1$ şi $d_2$ sînt paralele cu alte două drepte concurente $d_3$ şi $d_4$, atunci planele determinate de dreptele $d_1$, $d_2$ şi $d_3$, $d_4$ sînt paralele între ele.

$T_3$ dacă un plan $\alpha_1$, intersectează două plane paralele $\alpha_2$ şi $\alpha_3$, atunci dreptele de intersecţie dintre $\alpha_1$ şi respectiv $\alpha_2$ şi $\alpha_3$ sînt două drepte paralele.

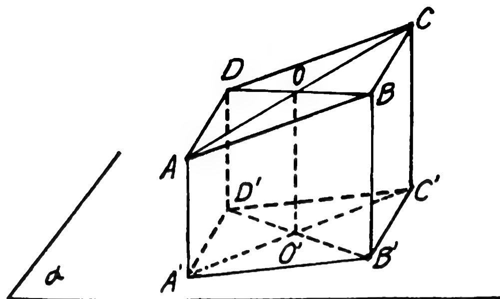



*Fig. VIII.G.6.*

Deoarece $AA' \perp \alpha$, $BB' \perp \alpha$, $CC' \perp \alpha$ şi $DD' \perp \alpha$ (construcţie) $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ (1) $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ ($T_1$) $\Longrightarrow$ $AA'BB' \parallel CC'DD'$, deoarece $AB \parallel$ $\parallel DC$ (ipoteză) şi $BB' \parallel CC'$ (1) şi conform $T_2$ rezultă paralelismul planelor $\Longrightarrow$ $A'B' \parallel D'C'$ şi $B'C' \parallel A'D'$ (conform $T_3$) $\Longrightarrow$ $A'B'C'D'$ paralelogram. $\Longrightarrow$ $A'O' \equiv O'C'$ şi $B'O' \equiv O'D'$ (2). Însă $AO \equiv OC$ şi $BO \equiv OD$ (3)

(ipoteză $ABCD$ paralelogram). Dar, $AA'CC'$ trapez dreptunghic ; din (1), din (2) și (3) $\Rightarrow$ $OO'$ este linie mijlocie în acest trapez, adică : $OO' = \frac{AA' + CC'}{2}$ și deci $OO' = \frac{a+c}{2}$ (4). Dar și $BB'DD'$ trapez dreptunghic ; din (1), din (2) și (3), $OO'$ linie mijlocie în acest trapez, adică : $OO' = \frac{BB' + DD'}{2}$ și deci $OO' = \frac{b+d}{2}$ (5). Din (4) și (5) $\Rightarrow$ $a + c = b + d$. (Vezi fig. VIII.G.6.)

**VIII.G.7.** Se construiește $\triangle$ isoscel $ACD$ ($AC = AD = 5$ și $CD = 6$). (Vezi fig. VIII.G.7.) Prelungim $DA$ cu $AB = 10$ (ipoteză). În acest fel obținem punctul $B$ care împreună cu punctele existente $C$ și $D$, determină $\triangle BCD$.

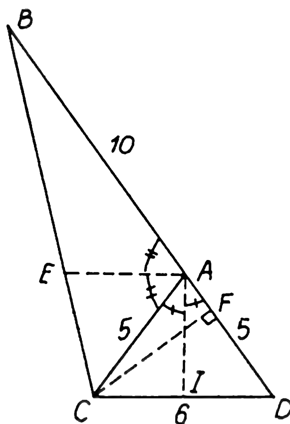



*Fig. VIII.G.7.*

Calculul distanței $ME$ : În planul $\triangle BCD$, ducem $AI \perp CD$ (vezi fig. VIII.G.7.) $\Rightarrow$ $AI$ bisectoarea $\widehat{CAD}$ ($\triangle CAD$ isoscel : $AC \equiv CD$). Construim bisectoarea $\widehat{BAC}$, ducînd $AE \perp AI$ (bisectoarea unghiului interior $A$, este perpendiculară pe bisectoarea unghiului $A$ exterior $\triangle CAD$). $\Rightarrow$ $AE \parallel CD$ (1), (deoarece $AI \perp CD$ și $AI \perp AE$). $\Rightarrow$ $\triangle BAE \sim \triangle BDC$. (Teorema fundamentală a asemănării în $\triangle BCD$ ($AE \parallel CD$). $\Rightarrow$ $\frac{AE}{CD} = \frac{BA}{BD}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\frac{AE}{6} = \frac{10}{15}$ ; $\frac{AE}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow AE = 4$ (2).

În continuare, se duce $MA \perp (BCD)$. (Vezi fig. VIII.G.7'.)

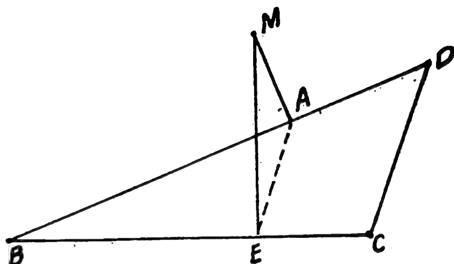



*Fig. VIII.G.7'.*

Deoarece $MA \perp (BCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $MA \perp AE$. Se aplică teorema directă a lui Pitagora în $\triangle MAE$, $m(A) = 90°$.

$ME^2 = MA^2 + AE^2$ ; $ME^2 = 9 + 1 + 16 = 25$ ; $ME = 5$.

Calculul distanței $BC$.

În planul $\triangle BCD$ (vezi fig. VIII.G.7.) ducem $CF \perp AD \Rightarrow$. Aria $\triangle ACD = \frac{CF \cdot AD}{2} = \frac{AI \cdot CD}{2}$, adică $\frac{CF \cdot 5}{2} = \frac{AI \cdot 6}{2}$

Cum $AI = \sqrt{25 - 9} = 4$ ($\triangle AIC$ este dreptunghic în $I$ din construcție $AI \perp CD$) rezultă $CF = \frac{24}{5}$. (4)

În $\triangle$ dreptunghic $CFA$ (construcție), $AF = \sqrt{25 - \frac{24^2}{25}}$

și după efectuarea calculelor $AF = \frac{7}{5}$. (5)

În $\triangle$ dreptunghic $BFC$, $m(\widehat{CFB}) = 90°$ (construcție), $BC^2 = CF^2 + BF^2$ și conform (4) și (5) $BC = \frac{5\sqrt{145}}{5}$ și după efectuarea calculelor rezultă $BC = \sqrt{145}$.

**VIII.G.8.** a) Notăm $BN = x \Rightarrow AM = 2x$ (ipoteză). Calculăm lungimile laturilor $\triangle MNC$ ; $MN^2 = a^2 + x^2$ (1) ; $NC^2 = a^2 + x^2$ (2) ; $MC^2 = a^2 + 4x^2$ (3). Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $MN \equiv NC$. Deci triunghiul $MNC$ este isoscel. (Vezi fig. VIII.G.8.)

b) Triunghiul $MNC$ fiind isoscel $MN \equiv NC$ (din (a)), el poate fi dreptunghic numai în vîrful $N \Rightarrow MN^2 + NC^2 = MC^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2x^2 = a^2 + 4x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Verificare : $MN^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$ $\quad NC^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{3a^2}{2} = 4$ și $MC^2 = a^2 = 2a^2 = 3a^2$.

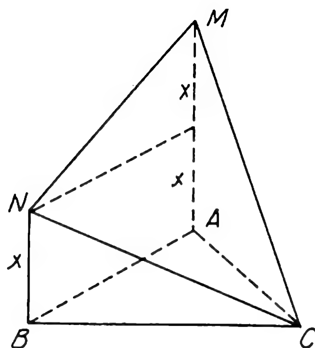



*Fig. VIII.G.8.*

Reciproca teoremei lui Pitagora se verifică pentru $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, şi unghiul drept este în vîrful $N$.

**VIII.G.9.** a) $AO \equiv OC$ şi $AO \perp BD$ ($ABCD$ pătrat). (1)

Cum $DE \perp (ABCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow DE \perp AO$. (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow AO \perp (DB, DE) \Rightarrow AO \perp (EDB) \Rightarrow AO \perp PO$. (3)

Deci $m(\widehat{OP, AC}) = 90°$. (Vezi fig. VIII.G.9.)

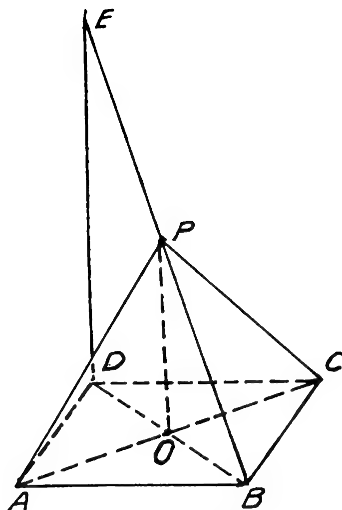



*Fig. VIII.G.9.*

b) Din (1) și (3) $\Rightarrow$ $\triangle APC$ isoscel : $PA \equiv PC$. Știm că $AC = a\sqrt{2}$ (ipoteză). Segmentul $AC$ va fi baza comună celor două triunghiuri isoscele $ABC$ (ipoteză) și $APC$ (demonstrat). Înălțimile corespunzătoare sînt $BO$ (ipoteză $ABCD$ pătrat) și $PO$ (demonstrat).

$$1)\ AC \cdot BO = 3 \cdot AC \cdot PO \Leftrightarrow BO = 3 \cdot PO \Leftrightarrow PO = \frac{BO}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Cercetăm dacă acest rezultat este posibil.

Segmentul $OP$, cînd $P$ variabil, are cea mai mică lungime cînd $OP \perp BE$. Calculînd în $\triangle EDB$ ($m(\widehat{D}) = 90°$) lungimea $OP$ ($OP \perp BE$) obținem (folosind asemănarea triunghiurilor $EDB$ și $OPB$) : $\frac{ED}{OP} = \frac{BE}{OB}$, adică : $\frac{2a}{OP} = \frac{a\sqrt{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow OP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Deci, cea mai mică lungime a segmentului $OP$ este egală cu $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. În ipoteză aria $\triangle ABC$ de trei ori mai mare decît aria $\triangle APC$, a rezultat $OP = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ Comparăm cele două rezultate $\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a\sqrt{6}}{6}$ și $\frac{a\sqrt{2}}{6}$, deci numele $2\sqrt{6}$ și $\sqrt{2}$ adică $2\sqrt{3}$ și 1. Cum $2\sqrt{3} > 1 \Rightarrow \frac{a\sqrt{3}}{3} > \frac{a\sqrt{2}}{6}$ Cum $OP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ este cea mai mică distanță de la $O$ la $EB$ rezultă că nu există o poziție a punctului $D \in BE$ astfel încît $OP = \frac{a\sqrt{2}}{6}$ și deci nu există un punct $P \in EB$ astfel încît să aibă loc ipoteza (b1).

2) Dacă ariile sînt egale, rezultă $AC \cdot BO = AC \cdot PO \Leftrightarrow BO \equiv PO$ și deci $OP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Procedînd analog că la punctul b1 constatăm că rezultatul este posibil deoarece $\frac{a\sqrt{2}}{2} > \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ($3\sqrt{2} > 2\sqrt{3} \Leftrightarrow 9 \cdot 2 > 4 \cdot 3$). Punctul $P$ se construiește astfel : descriem în planul $EDB$ un semicerc cu centrul în $O$ și de rază $OP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Semicercul va fi tangent laturii $ED$ ($ED \perp DB$) și va intersecta latura $EB$ în două puncte $B$ și $P$ (deoarece $OP = \frac{a\sqrt{2}}{2} > \frac{a\sqrt{3}}{3}$).

Altă construcție care fixează punctul P. Cum $\triangle BOP$ este isoscel ($BO \equiv OP$) ducem $OS \perp EB \Rightarrow PS \equiv SB$. Ducem în $\triangle EDB$ ($mD = 90°$) înălțimea $DR$, $R \in BE \Rightarrow$ în $\triangle RDB$, $OS$ linie mijlocie $OS \parallel DR$ și $DO \equiv OB \Rightarrow R = P$). Așadar, în ipoteza (b2) punctul $P$ coincide cu piciorul înălțimii $\triangle EDB$ relativă laturii $EB$.

Poziţia punctului $P$ care conduce la aria minimă a $\triangle APC$ este dată de minimul distanţei $OP$ (deoarece $AC$ baza $\triangle APC$ are lungime constantă) şi deci, atunci cînd $OP \perp BC$, poziţie a punctului $P$ pentru care $OP = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Aria minimă va fi $\frac{AC \cdot OP}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^2\sqrt{6}}{6}\, u^2$ (unde $u$ este unitatea de măsură pentru lungime).

**VIII.G.10.** Triunghiurile $A'AC$ şi $B'BC$ sînt dreptunghice în $A$ şi respectiv $B$ (o dreaptă perpendiculară pe un plan dat este perpendiculară pe orice dreaptă continuţă în planul dat). (Vezi fig. VIII.G.10.)

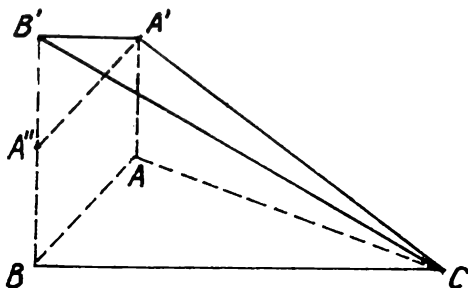



*Fig. VIII.G.10.*

Notăm $AA' = x$; şi $x \neq a$, căci presupunînd $x = a \Rightarrow AA' \equiv BB' \Rightarrow \triangle A'AC \equiv \triangle B'BC \Rightarrow A'C \equiv B'C \Rightarrow A'CB'$ isoscel şi nici una din ipotezele

a) $A'B'C'$ dreptunghic în $B'$ sau

b) $A'B'C$ isoscel cu $A'B' \equiv A'C$ nu sînt posibile.

Aşadar $x \neq a$. Presupunem $x < a$ (Vezi fig. VIII.G.10.). Calculul lungimilor segmentelor $A'B'$, $B'C$ şi $CA'$. În planul $(AA'BB')$ ducem $A'A'' \parallel AB$. Cum $B'B \perp (ABC)$ (ipoteză) $\Rightarrow \triangle A'A''B'$ este dreptunghic $\Rightarrow m(\widehat{A'A''B'}) = 90°$ şi patrulaterul $AA'BA''$ este un dreptunghi. Conform teoremei lui Pitagora în $\triangle A'A''B'$ avem: $A'B'^2 = B'A''^2 + A''A'^2 \Leftrightarrow A'B'^2 = a^2 + (a - x)^2$ (1) [deoarece $(a - x)^2 = (x - a)^2$ vom înţelege de ce în rezolvarea problemei putem presupune $x < a$ sau $x > a$].

În $\triangle$ dreptunghic $B'BC$ (ipoteză) $B'C^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. (2)

În $\triangle$ dreptunghic $A'AC$ (ipoteză) $A'C^2 = x^2 + a^2$. (3)

În ipoteza (a), conform reciprocei teoremei lui Pitagora, urmează să existe relaţia $A'B'^2 + B'C^2 = A'C^2$; adică $a^2 + (a - x)^2 + 2a^2 = x^2 + a^2$ (rezultă după înlocuirea (1), (2) şi (3) în relaţia precedentă).

Ecuaţie de gradul întîi în $x$, care, rezolvată conduce la soluţia $x = \frac{3a}{2}$ şi deci în ipoteza (a), $AA' = \frac{3a}{2}$

În ipoteza (b) laturile $A'B' \equiv A'C \Rightarrow A'B'^2 = A'C^2$ şi deci, înlocuind în această relaţie (1) şi (3) rezultă : $a^2 + (a - x)^2 = x^2 + a^2$. Ecuaţia de gradul întîi în $x$ are drept soluţie $x = \frac{a}{2}$ şi deci în ipoteza (b), $AA' = \frac{a}{2}$

**VIII.G.11.** 1. Dreptele $AA'$, $BB'$ şi $CC'$ fiind perpendiculare pe planul $ABC$ (ipoteză), rezultă că $AA' \| BB' \| CC'$ (1) (două drepte perpendiculare pe acelaşi plan sînt paralele între ele ; apoi tranzitivitatea relaţiei de

*Fig. VIII.G.11.*

paralelism), dar şi faptul că dreptele $AA'$, $BB'$ şi $CC'$ sînt perpendiculare pe laturile $\triangle ABC$ (2) (o dreaptă perpendiculară pe un plan este perpendiculară pe orice dreaptă din planul dat). Din (1) şi (2) şi construind $B'B_1 \| AB$ şi $B'B_2 \| BC$ şi $A'A_1 \| AC$ rezultă că $ABB'B_1$, $BCB_2B'$ şi $ACA_1A'$ sînt dreptunghiuri (3) iar triunghiurile $A'B_1B'$, $C'B_2B'$ şi $C'A_1A'$ sînt triunghiuri dreptunghic (4). Notăm $AA' = x$ ; $CC' = y$. Am presupus $1 < x < y$. (Puteam face şi presupunerea $1 < y < x$, rezultatul rămînînd neschimbat, deoarece $(a - b^2 = (b - a)^2$.) Conform acestei presupuneri evaluăm lungimile segmentelor $A'B'$, $B'C'$ şi $C'A'$. (Vezi fig. VIII.G.11.)

În $\triangle$ dreptunghic $A'B_1B'$ (conf. 4) $A'B'^2 = A'B_1^2 + B_1B'^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow A'B'^2 = (x - 1)^2 + 9$.

În $\triangle$ dreptunghic $C'B_2B'$ (conf. 4) : $B'C'^2 = B_2C'^2 + B_2B'^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow B'C'^2 = (y - 1)^2 + 25$ (conf. 3 şi faptului că în $\triangle$ dreptunghic $ABC$ catetele sînt egale cu 3 cm şi respectiv 4 cm).

În $\triangle$ dreptunghic $C'A_1A'$ (conf. 4) : $A'C'^2 = A'A_1^2 + A_1C'^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow A'C'^2 = 16 + (y + x)^2$. Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, $\Rightarrow$

$\Longrightarrow$ ca $\triangle A'B'C'$ să fie dreptunghic în $B'$ urmează să existe relația : $B'A'^2 + B'C'^2 = A'C'^2$ și înlocuind, obținem (5) $(x-1)^2 + 9 + (y-1)^2 + 25 = (y-x)^2 + 16$. După efectuarea calculelor se obține o relație între $x$ și $y$ și anume $x + y + xy = 10$ (6).

2) Pentru a determina toate valorile naturale ale lui $x$ explicităm relația dată. De exemplu

$$x(1+y) = 10 - y \iff x = \frac{10-y}{1+y} \tag{7}$$

Gîndim astfel deoarece $\begin{cases} x \in \mathbf{N} \\ \text{și} \\ y \in \mathbf{N} \end{cases} \Longrightarrow 10 - y \geq 0 \iff y \leq 10$ iar $y + 1$ divizor pentru $10 - y$.

Pentru $y = 10$, obținem $x = 0$. Soluție

Pentru $y = 9$, obținem $x = \frac{1}{10} \notin \mathbf{N}$.

Pentru $y = 8$, obținem $x = \frac{2}{9} \notin \mathbf{N}$.

Pentru $y = 7$, obținem $x = \frac{3}{8} \notin \mathbf{N}$.

Pentru $y = 6$, obținem $x = \frac{4}{7} \notin \mathbf{N}$.

Pentru $y = 5$, obținem $x = \frac{5}{6} \notin \mathbf{N}$.

Pentru $y = 0$, obținem $x = 10$. Soluție.

Așadar, perechile de numere naturale care verifică relația (6) sînt, ($x = 0$ și $y = 10$) și ($x = 10$ și $y = 0$).

În primul caz $\triangle A'B'C'$ are $A' = A$, în al doilea caz are $C' = C$.

Verificare : $A' = A$ și $m(\widehat{A'B'C'}) = 90° \Longrightarrow AB'^2 + B'C'^2 = AC'^2$, adică $10 + 106 = 116$ ; $C' = C$ și $m(A'B'C') = 90° \Longrightarrow A'B'^2 + B'C^2 = A'C^2$, adică $90 + 26 = 116$.

**VIII.G.12.** Așadar, trebuie să construim în punctul $M$, planul care să fie perpendicular pe dreapta $AM$. Procedăm astfel În punctul $M$ și în planul $ABC$, ducem dreapta $MX$ perpendiculară pe dreapta $AM$, deci $MX \perp AM$. Într-un alt plan $\beta$ care trece prin dreapta $AM$, ducem de asemenea dreapta $MY$ perpendiculară pe dreapta $AM$, deci $MY \perp AM$. Planul căutat $\alpha$, este determinat de dreptele concurente $MX$ și $MY$. Rezultă că $AM \perp XY$ (1). (Vezi fig. VIII.G.12.) ($AM$ este perpendiculară pe două drepte concurente din $\alpha$).

Fie $P$ un punct oarecare din planul $\alpha$. (Vezi fig. VIII.G.12.) Triunghiul $AMP$ este dreptunghic în $M$ (conf. (1)) și conform teoremei directe a lui Pitagora, putem scrie

$$PA^2 = AM^2 + MP^2. \tag{2}$$

Fig. VIII.G.12.

În $\triangle BPC$, $PM$ este mediană (ipoteza $BM \equiv MC$). Presupunem cunoscută „teorema medianei“, relaţie cu ajutorul căreia se poate calcula lungimea medianei unui triunghi în funcţie de laturile triunghiului. În cazul $\triangle BPC$ relaţia de mai sus este: $PM^2 = \frac{PB^2 + PC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$ (3). (Verificaţi exactitatea acestei teoreme în cazul unui triunghi dreptunghic, spre exemplu chiar a $\triangle ABC$ în care $AM$ este mediană.

Înlocuind valoarea lui $PM^2$ în relaţia (2) obţinem :

$$PA^2 = AM^2 + \frac{PB^2 + PC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \text{ (4), dar } AM^2 = \frac{BC^2}{4},$$

în $\triangle$ dreptunghic lungimea medianei relative ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei şi atunci (4) devine :

$$PA^2 = \frac{BC^2}{4} + \frac{PB^2 + PC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} \text{ şi deci,} \tag{5}$$

$$2 \cdot PA^2 = PB^2 + PC^2 \tag{6}$$

şi astfel am obţinut relaţia din concluzia problemei.

**VIII.G.13.** a) Începem prin a arăta că în ipoteza $AA' \perp \alpha$ şi $AA' = 3$ cm, există un punct în $\alpha$, de exemplu $B$, astfel încît $AB = 5$ cm. Ducem în $\alpha$, o semidreaptă $A'X$ pe care fixăm segmentul $A'B = 4$ cm. Conform teoremei lui Pitagora $AB = 5$ cm. (Vezi fig. VIII.G.13.)

Aşadar, în $\alpha$, ducînd semidreptele $A'X$ şi $A'Y$ putem fixa pe ele — conform celor arătate mai sus — segmentele $A'B$ şi $A'C$, astfel încît $AB = AC = 5$ cm. Deoarece $\triangle A'BC$ este isoscel (construcţie) $A'B =$

*Fig. VIII.G.13.*

$= A'C = 4$, înseamnă că puncte de felul punctelor $B$ și $C$ din planul $\alpha$, se pot obține ducînd întîi un cerc de centru $A'$ și raza $A'B = 4$, apoi construim semidrepte arbitrare $A'X$ și $A'Y$. Ele vor intersecta cercul construit în puncte notate, de exemplu $B$ și $C$ astfel încît $A'B = A'C = 4$ și care permit construirea segmentelor $AB = AC = 5$.

Triunghiul $ABC$ (spațiu) este isoscel $AB = AC = 5$. Urmează să executăm o construcție în urma căreia triunghiul $ABC$ să devină echilateral $AB = BC = CA = 5$. Cum punctele $B$ și $C$ se găsesc în $\alpha$ și pe cercul construit, urmează să arătăm că pe un cerc dat, de raza 4 cm și centru fixat, există două puncte, de exemplu $B$ și $C$ astfel încît $BC = 5$. Fixăm pe cercul dat punctul $B$ și apoi cu ajutorul compasului, construim punctul $C$ astfel încît $BC = 5$. Construcția are două soluții dacă $BC < 8$, o soluție dacă $BC = 8$ și nici o soluție dacă $BC > 8$ (diametrul cercului fiind egal cu 8 cm).

Prin „loc geometric" vom înțelege o figură geometrică formată numai din mulțimea unor puncte care au aceeași proprietate — în cazul de față, puncte de felul punctelor $B$ și $C$ au următoarele proprietăți : se găsesc la aceeași distanță de punctul fix $A'$, $A'B = A'C = 4$ cm și $BC =$ $< 5$ cm, deoarece $\triangle AA'D \neq \triangle AA'B$. Dacă considerăm un punct $E$ în $= A'C = 4$, astfel încît $BC = 5$ cm. Reuniunea acestor arce reprezintă chiar cercul de centru $A'$ și raza 4 cm. Oricare alte puncte din planul $\alpha$ și care nu au proprietățile punctelor $B$ și $C$, nu aparțin locului geometric. De exemplu, luînd un punct $D$ în interiorul cercului, $A'D < 4$, $AD <$ $< 5$ cm, deoarece $AA'D \neq \triangle AA'B$. Dacă considerăm un punct $E$ în exteriorul cercului, $A'E > 4$, $AE > 5$ cm, deoarece $\triangle AA'E \neq \triangle AA'B$ Dacă luăm punctele $M$ și $N$ pe cercul dat, dar $MN \neq 5$, ele nu satisfac ipoteza $AMN$ echilateral.

b) Cercetăm triunghiul isoscel $A'BC$ în care, $A'B = A'C = 4$ cm și $BC = 5$ cm. Oricare ar fi punctele $B$ și $C$ de pe cercul de centru $A'$ și raza $A'B = 4$ cm, astfel încît $\triangle$ din spațiu $ABC$ este echilateral și $A'$ este proiecția punctului $A$ pe $\alpha$, triunghiul isoscel $A'BC$ are lungimile laturilor constante (și unghiurile acestui triunghi vor fi constante). În $\triangle A'DB$ calculăm lungimea $A'D$ (Pitagora) unde $A'D \perp BC$, $A'D = \frac{\sqrt{39}}{2}$.

Apoi construim pe latura $BC$ și în planul $\alpha$ triunghiul echilateral $EBC$ (Vezi fig. VIII.G.13'.) ($E$ de aceeași parte cu $A'$). Înălțimea $ED = \frac{\sqrt{75}}{2}$ (Pitagora în $\triangle EDB$). $\Rightarrow ED > A'D \Rightarrow$ unghiul $BA'D$ unghi exterior $\triangle BA'E$ și $m(\widehat{BA'D}) = m(\widehat{EBA'}) + m(\widehat{BEA'}) \Rightarrow 2 \cdot m(\widehat{BA'D}) = m(\widehat{BA'C}) = 2m(\widehat{EBA'}) + 60° \Rightarrow m(\widehat{BA'C}) > 60°$.

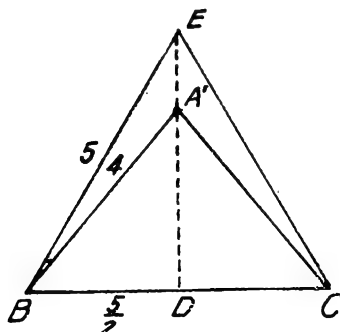



*Fig. VIII.G.13'.*

**VIII.G.14.** Distanța de la punctul $V$ la latura $BC$ se pune în evidență astfel Din punctul $V$ se duce o perpendiculară pe planul $ABCD$. Ea este $VD$ (ipoteză). $\Rightarrow VD \perp BC$. Din punctul $D$ se duce o perpendiculară pe dreapta $BC$, deci $DE \perp BC$, $E \in BC$. Prin teorema directă a celor trei perpendiculare rezultă că $VE \perp BC$. ($VE$ este a treia perpendiculară pe latura $BC$). (Vezi fig. VIII.G.14.) În $\triangle ABC$, $AB = BC = a$ și $AC =$

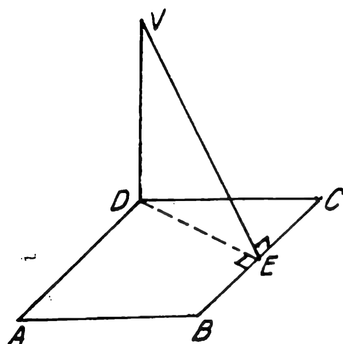



*Fig. VIII.G.14.*

$=\sqrt{3} \Rightarrow$ $AB$ și $BC$ sînt laturile hexagonului regulat înscris în cercul circumscris $\triangle ABC$, iar $AC$ latura triunghiului echilateral înscris în același cerc $\Rightarrow$ rombul $ABCD$ este format din două triunghiuri echilaterale $ABD$ și $CBD$ de latura $a$. $\Rightarrow$ $DE$ înălțimea $\triangle$ echilateral $DBC \Rightarrow BE =$

$= EC \Rightarrow DE = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ În $\triangle$ dreptunghic $VDE$ (ipoteză),

$VE = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$ Deci distanța căutată are lungimea $\frac{a\sqrt{7}}{2}$

**VIII.G.15.** Prin teorema celor trei perpendiculare, distanța de la $N$ la latura $AB$ este distanța dintre punctele $N$ și $P$ ($P$ fiind proiecția punctului $M$ pe latura $AB$. (Vezi fig. VIII.G.15a.) Cum $NMP$ este dreptunghic în $M$ (ipoteză) și $MN = 6$ cm, urmează să calculăm lungimea $MP$ (în ipotezele problemei). Construim pe trapezul dat $ABCD$, (Vezi fig. VIII.G.15b.), paralelogramul $ABA'B'$ astfel încît $AB' = BC + AD$. În acest fel, aria paralelogramului $ABA'B'$ va fi de două ori mai mare decît aria trapezului dat $ABCD$. Deci aria $ABA'B' = 112$ cm$^2$.

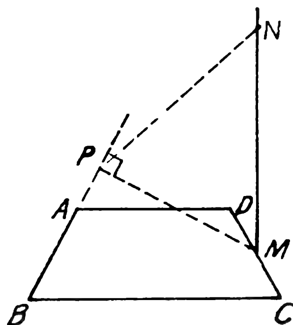



*Fig. VIII.G.15.a.*

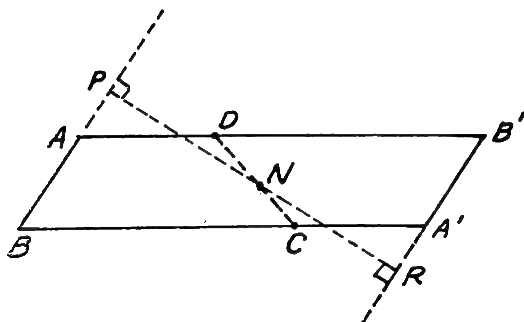



*Fig. VIII.G.15.b.*

Fie baza paralelogramului latura $AB$. Înălţimea corespunzătoare (distanţa dintre laturile paralele $AB$ şi $A'B'$ va fi $PR = 2 \cdot MP$. Deci $112 = AB \cdot PR$; $112 = 7 \cdot PR \Leftrightarrow PR = 16$ cm şi deci $MP = 8$ cm.

În $\triangle NMP$, $NP = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{10}$ cm şi reprezintă distanţa căutată.

**VIII.G.16.** Trapezul isoscel $ABCD$ are baza mică $AB = a$.

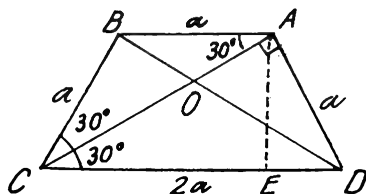



*Fig. VIII.G.16.a.*

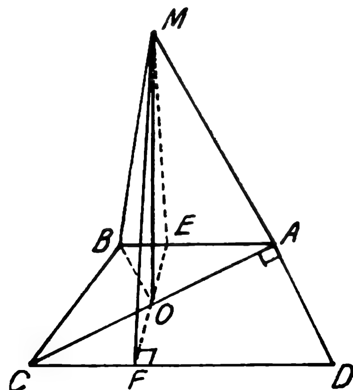



*Fig. VIII.G.16.b.*

a) Evaluăm laturile trapezului isoscel $ABCD$. (Vezi fig. VIII.G.16a.) Deoarece $AB = AD = BC = a \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow m(\widehat{BCA}) = 30°$ (1). Însă $m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCD}) = 180°$, ($ABCD$ trapez) $\Rightarrow m(\widehat{BCD}) = 60°$, (deoarece în $\triangle$ isoscel $ABC$, $m(\widehat{ABC}) = 120°$ (2). Cum $m(\widehat{BCA}) = 30° \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{ACD}) = 30°$ şi deci $CA$ este bisectoarea unghiului $BCD$. Ducem $AE \perp CD \Rightarrow m(\widehat{EAD}) = 30°$, $m(\widehat{EAD}) + m(\widehat{ADE}) = 90°$ şi $m(\widehat{ADE}) =$ $= m(\widehat{BCD}) = 60°$, demonstrat. $ABCD$ fiind trapez isoscel $\Rightarrow ED =$ $= \frac{AD}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow CD = a + 2 \cdot \frac{a}{2} = 2a$. (3)

Altă soluţie pentru calculul lungimii segmentului $CD$.

În $\triangle CAD$, $m(\widehat{ACD}) = 30°$ (demonstrat). $m(\widehat{CDA}) = 60° = m(\widehat{BCD})$ (trapezul $ABCD$ isoscel) $\Rightarrow m(\widehat{CAD}) = 90° \Rightarrow CD = 2AD = 2 \cdot a$.

Să reţinem că $CA \perp AD$. (4)

b) Calculul distanţelor de la punctul $M$ la laturile neparalele ale trapezului $ABCD$.

Conform teoremei celor trei perpendiculare, distanţele de la punctul $M$ la laturile trapezului isoscel $ABCD$, se obţin ducînd în planul $ABCD$ perpendiculare din punctul $O$ pe latura trapezului (Vezi fig.

VIII.G.16b.) şi apoi unim punctul $M$ cu picioarele perpendicularelor duse din $O$ pe laturile trapezului.

Cum $OA \perp AD$ (conf. (4)), distanţa de la $M$ la $AD$ este $MA$. Analog, distanţa de la $M$ la $BC$ este $MB$. Însă, $\triangle MOA \equiv \triangle MOB$ (dreptunghice din ipoteză şi $OA \equiv OB$ iar $MO$ latură comună $\Rightarrow MA \equiv MB$. Aşadar, este suficient să calculăm de exemplu lungimea $MA$. În $\triangle$ dreptunghic $MOA$, $MA^2 = MO^2 + OA^2$ ; $MA^2 = \frac{2a^2}{9} + OA \left(\text{ipoteză } MO = \frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$

Calculul lungimii $OA$ $\triangle AOB \sim \triangle COD$ (unghiurile congruente).

Raportul de asemănare este $\frac{AB}{CD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = \frac{1}{3} AC =$ $= \frac{1}{3} a \cdot \sqrt{3}$ (în $\triangle$ dreptunghic $CAD$, $AC = a\sqrt{3}$). Rezultă că $MA^2 =$

$$= \frac{2a^2}{9} + \frac{3a^2}{9} = \frac{5a^2}{9} ; MA = \frac{a\sqrt{5}}{3} = MB. \quad (5)$$

c) Calculul distanţelor de la punctul $M$ la laturile paralele ale trapezului $ABCD$.

Ducem dreapta $EOF \perp AB$. Cum $ABCD$ este trapez isoscel $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle OEA \equiv \triangle OEB$ şi $\triangle OFD \equiv \triangle OFC$ (catetă, ipotenuză). În această situaţie, $AE \equiv EB$ şi $OF \equiv FC$, iar distanţele de la $M$ la $BA$ şi $CD$ sînt segmentele $ME$ şi $MF$ (teorema celor trei perpendiculare). Cum $\triangle AOB \sim$ $\sim \triangle COD$ (demonstrat) raportul înălţimilor acestor triunghiuri este raport de asemănare $\Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{1}{2}$ Însă, $OE + OF = AE$ (Vezi fig. VIII.G.16.a.). Însă, $AE = \frac{AC}{2}$ (în $\triangle$ dreptunghic $AEC$, $m(\widehat{ACE}) = 30°$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ şi } OF = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow ME = \frac{a\sqrt{11}}{6} \text{ şi } MF = \frac{a\sqrt{5}}{3} \quad (6)$$

**VIII.G.17.** a) Cum $AB^2 = 100$, $AD^2 = 36$ ; $BD^2 = 64$ $\Rightarrow AB^2 = AD^2 +$ $+ DB^2 \Rightarrow AD \perp DB$ (conform teoremei reciproce a lui Pitagora) (1). Fie $O$ intersecţia diagonalelor $AC$ şi $BD$. Aplicăm Pitagora în $\triangle ADO$ ($m(\widehat{ADO}) = 90°$ conform (1)) $\Rightarrow AO^2 = AD^2 + DO^2$ ; $AC^2 = 36 + 16$ ; $AO^2 = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow AC = 4\sqrt{13}$ cm. (Vezi fig. VIII.G.17.)

b) Distanţa de la $M$ la diagonala $AC$ este $MP = 5$ cm (ipoteză).

Distanţa de la $M$ la diagonala $DB$. Ducem $PR \perp DO \Rightarrow MR$ este distanţa căutată (conf. teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.17.)

Calculul distanţei $MR$ :

În $\triangle MPR$ ($MP \perp PR$ ipoteză) $MR^2 = MP^2 + PR^2$, $MR^2 = 25 +$ $+ 9$ ($PR = 3$ fiind linie mijlocie în $\triangle$ dreptunghic $ADO$) : $MR = 34$ cm.

Distanţa de la $M$ la $AD$ şi $BC$. Pentru ambele ducem din $M$ perpendiculara lor comună $ST$, unde $S \in AD$ şi $T \in CB$ (Vezi fig. VIII.G.17.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow SDBT$ dreptunghi (construcţie şi ipoteză). În $\triangle$ dreptunghic $ADO$

Fig. VIII.G.17.

(conform 1) $PS \| OD$ (construcţie) şi cum $AP \equiv PO$ (ipoteză), $\Rightarrow$ $PS$ linie mijlocie $\Rightarrow$ $PS = 2$. În dreptunghiul $SDBT$, $PT = ST - PS = 8 - 2 = 6 \Rightarrow PT = 6$.

Distanţa de la $M$ la $AD$ este $MS$ (teorema celor trei perpendiculare). În $\triangle$ dreptunghic $MPS$ (ipoteză) $MS^2 = MF^2 + PS^2$; $MS = \sqrt{29}$ cm.

Distanţa de la $M$ la $BC$ este $BT$ (teorema celor trei perpendiculare). În $\triangle$ dreptunghic $MPT$ (ipoteză) $MT = MP + PT$; $MT = \sqrt{61}$ cm.

**VIII.G.18.** 1. Ducem $OO' \perp (ABC)$ (1). Cum $OA = OB = OC = a$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $O'A \equiv O'B \equiv O'C$; ($\triangle OO'A \equiv \triangle OO'B \equiv \triangle OO'C$ — catetă — ipotenuză) $\Rightarrow$ $O'$ centrul cercului circumscris $\triangle ABC \Rightarrow O'$ ortocentrul

Fig. VIII.G.18.

$\triangle ABC$ ($ABC$ echilateral — ipoteză) $\Rightarrow AO' \perp BC$ (2). (Într-un $\triangle$ echilateral $O'$, centrul cercului circumscris $\triangle$ echilateral este şi ortocentrul triunghiului. (Vezi fig. VIII.G.18.).

Din (1) şi (2) $\Rightarrow BC \perp (OO', AO') \Rightarrow BC \perp AO$. Relaţia de perpendicularitate fiind simetrică $\Rightarrow AO \perp BC$. Analog se demonstrează $OB \perp \perp AC$ şi $OC \perp AB$.

2. Pentru a se demonstra că $MN \perp AB$ procedăm astfel (Vezi fig. VIII.G.18.) $\triangle BOC \equiv \triangle AOC$ (echilaterale de latura $AB$ — ipoteză) (1) $\Rightarrow BN \equiv AN$. (2) (Deoarece $ON \equiv NC$ (ipoteză) $\Rightarrow BN$ şi $AN$ înălţimi în $\triangle$ echilaterale şi congruente $BOC$ şi $AOC$ (conform (1)).

Cum $AM \equiv MB$ (ipoteză) şi $BN \equiv AN$ (conform (2)) $\Rightarrow$ în $\triangle$ isoscel $ANB$ mediana $NM$ este şi înălţime $: MN \perp AB$. (3)

Analog se demonstrează că $MN \perp OC$, triunghiul isoscel fiind $\triangle OMC$.

**VIII.G.19.**

a) $\triangle AOB \equiv \triangle MBA$, deoarece (Vezi fig. VIII.G.19.) L.U.L. (sau C.C.)
$\begin{cases} OA \equiv MB \text{ (ipoteză)} \\ AB = BA \text{ (latură comună)} \\ m(\widehat{OAB}) \equiv m(\widehat{MBA}) = 90^\circ \\ \text{(ipoteză)} \end{cases}$

rezultă $m(\widehat{BMA}) = 60^\circ$ ; $m(\widehat{BAM}) = 30^\circ$ (din ipoteză şi congruenţa triunghiurilor precedente). Cum în triunghiurile congruente înălţimile corespunzătoare laturilor congruente sînt congruente $\Rightarrow BE = AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Punctul $D$ îl construim astfel : ducem $CC' \perp (ABM)$ (planul $ABM$ conţine dreapta $MB$ perpendiculară pe planul $(XOY)$ — (ipoteză) $\Rightarrow$ $\Rightarrow (ABM) \perp (XOY)) \Rightarrow CC' \perp AB$ (1). Din $C'$ ducem în planul $(ABM)$ o perpendiculară pe $AM : C'D \perp AM$ (2) $(D \in AM)$. Prin teorema celor trei perpendiculare $CD \perp AM$ (3) (Vezi fig. VIII.G.19.).

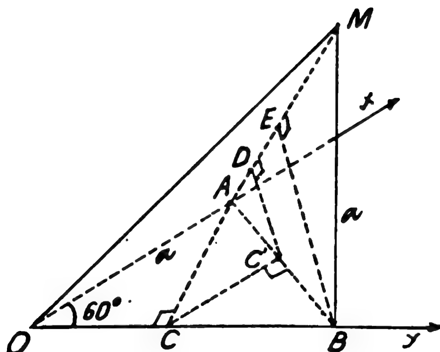


*Fig. VIII.G.19.*

Deoarece $CC' \perp AB$ (construcție) $\Rightarrow CC' \| OA \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{OC}{CB} =$

$= \frac{\frac{c}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{1}{3}$ (Thales în $\triangle OAB$) (4).

Deoarece $C'D \perp AM \Rightarrow C'D \| BE \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AC'}{C'B} = \frac{1}{3}$ (conform (4), și Thales în $\triangle BEA$) (5).

Așadar, $\frac{AD}{DE} = \frac{1}{3}$

c) Deoarece $\triangle OAB \equiv \triangle MBA$ (conform punctului a) $\Rightarrow OA = AM = a$ (1).

Deoarece $MB \perp (XOY)$ și $BA \perp OA$ (ipoteze) $\Rightarrow MA \perp OA$ (2) (teorema celor trei perpendiculare) $\Rightarrow OAM$ dreptunghi în $A \Rightarrow OM^2 = 2a^2$; $OM = a\sqrt{2}$ (3) $\Rightarrow OA + AM + MO = 2a + a\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2})$ (4).

d) Deoarece $OA \perp (MBA)$ ($OA \perp AB$ și $OA \perp MB$ — ipoteze) $\Rightarrow$ $\Rightarrow OA \perp BE \Rightarrow BE \perp OA$, (simetrie) (1).

Dar, $BE \perp AM$ (ipoteză) (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow BE \perp (OA, AM) \Rightarrow$ $\Rightarrow BE \perp (OAM)$. Așadar, dreapta $BE$ este perpendiculară pe planul $OAM$.

**VIII.G.20.** a) Cum dreptele $AA'$, $BB'$ și $CC'$ sînt perpendiculare pe $(ABC)$ (ipoteză) și $AA' = BB' = CC' = AC = CB = a$ (ipoteză) $\Rightarrow AA'BB'$ și $AA'CC'$ sînt pătrate. (1)

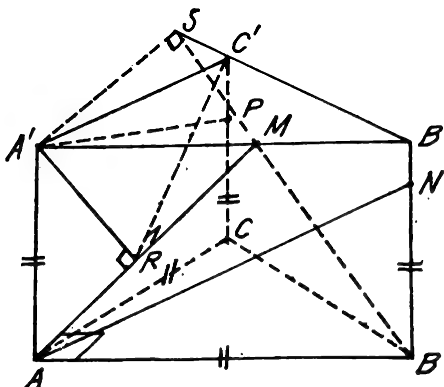



*Fig. VIII.G.20.a.*

Deoarece $C'A' \perp A'B'$ (construcție) și $C'A' \perp AA'$ (construcție) $\Rightarrow$ $\Rightarrow C'A' \perp (AA'BB')$ (2). Ducem $A'R \perp AM \Rightarrow C'R \perp AM$ (conform (2) și teoremei celor trei perpendiculare). Deoarece $C'A' \perp (AA'BB')$ (conform

(2)) $\Rightarrow$ $C'A' \perp A'R$ $\Rightarrow$ $\triangle C'A'R$ dreptunghic $m(\widehat{C'A'R}) = 90°$ (Vezi fig. VIII.G.20.a.) $\Rightarrow$ $C'R^2 = C'A'^2 + A'R^2$ $\Rightarrow$ $C'R^2 = a^2 + \frac{a^2 \cdot \frac{a^2}{4}}{\frac{5a^2}{4}} =$

$= a^2 + \frac{a^2}{5} = \frac{6a^2}{5}$. Aşadar, $C'R = \frac{a\sqrt{30}}{5}$.

b) Notăm cu $S$ proiecţia punctului $C'$ pe dreapta $BM$. Pentru a construi punctul $S$ procedăm astfel deoarece $C'A' \perp (AA'BB')$, ducem $A'S \perp BM \Rightarrow C'S \perp BM$ (teorema celor trei perpendiculare) şi astfel obţinem proiecţia punctului $C'$ pe dreapta $BM$. Cum $m(\widehat{A'SB}) = 90°$ oricare ar fi punctul $M \in A'B'$ rezultă că triunghiul dreptunghic $A'SB$ are lungimea ipotenuzei $A'B$ constantă. (Vezi fig. VIII.G.20.b.) $\Rightarrow$ Punctul $S$ se găseşte pe un cerc de diametru $A'B$ (constant), iar cînd $M$ parcurge segmentul $A'B'$, punctul $S$ parcurge arcul de cerc $A'SB'$. (Vezi fig. VIII.G.20.b.)

Astfel dacă $M = B'$ $\Rightarrow$ $S = B'$, dacă $M = A'$ $\Rightarrow$ $S = A'$. Pentru $M \in A'B'$, punctul $S$ este vîrful unghiului drept din $\triangle A'SB$. (Vezi fig. VIII.G.20.b.)

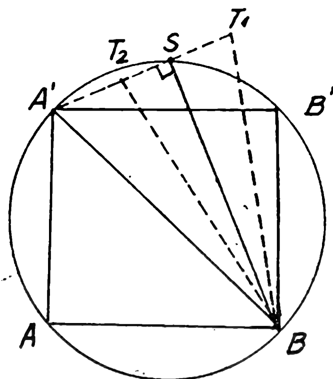



*Fig. VIII.G.20.b.*

Orice alt punct $T$ care nu se găseşte pe arcul $A'SB'$ nu răspunde la ipoteza : $C'T \perp BM$ deoarece măsura unghiului $A'TB$ este mai mică decît 90° — dacă $T$ se află în exteriorul cercului de diametru $A'B$ (punctul $T_1$) — şi mai mare decît 90° — dacă $T$ se află în interiorul acestui cerc (punctul $T_2$). (Vezi fig. VIII.G.20.b.)

c) $\triangle ABN \equiv \triangle A'C'P$ deoarece sînt dreptunghice şi au congruente catetele $AB$ şi $A'C'$ (egale cu $a$ — ipoteză) şi ipotenuzele $AN$ şi $A'P$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $BN \equiv C'P$ (1). În dreptunghiul $CC'BB'$ (Vezi fig. VIII.G.20.c.), $B'N \equiv CP$ (conform 1) (2). Notăm $O$ intersecţia segmentului $PN$ cu dia-

metrul $CB'$ $\Rightarrow$ $\triangle B'NO \equiv \triangle CPO$ deoarece : $B'N \equiv CP$ (conform 2); $m(\widehat{NB'O}) = m(\widehat{PCO})$ (alterne interne) şi $m(\widehat{ONB'}) = m(\widehat{OPC})$ (unghiurile din $O$ fiind concepute ca fiind opuse la vîrf). (Cazul U.L.U.) $\Rightarrow$ $NO \equiv OP$ oricum am alege punctele $N$ şi $P$ ($NB \equiv PC'$) $\Rightarrow$ punctul fix este $O$ mijlocul segmentului $CB'$ (Vezi fig. VIII.G.20.c.)

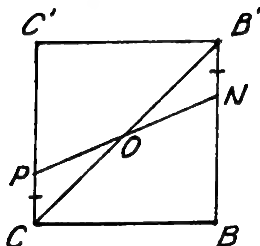



*Fig. VIII.G.20.c.*

**VIII.G.21.** a) $BA \perp (ADS)$ deoarece $BA \perp AD$ (ipoteză) şi $BA \perp AS$ (ipoteză : $AS$ perpendiculara pe planul $ABCD$). (1) (Vezi fig. VIII.G.21.) $AK \perp SD$ (ipoteză) (2). Din (1) şi (2) conform teoremei celor trei perpendiculare, $BK \perp SD$ $\Rightarrow$ $BK$ înălţime în $\triangle SDB$ (3). Analog $DH$ şi $SI$ sînt înălţimi în $\triangle SDB$ (4). Din (3) şi (4) $\Rightarrow$ segmentele $BK$, $DH$, $SI$, fiind înălţimile triunghiului $SDB$, sînt segmente concurente în acelaşi punct — ortocentrul $\triangle SDB$. (Vezi fig. VIII.G.21.)

b) Arătăm că $AH$ este perpendiculară pe două drepte concurente conţinute în planul $(SBC)$: $AH \perp SB$ (ipoteză) (1). Deoarece $CB \perp AB$ (ipoteză) şi $CB \perp SA$ (ipoteză : $SA \perp (ABCD)$ $\Rightarrow$ $CB \perp (SAB)$ $\Rightarrow$ $CB \perp$ $\perp AH$ $\Rightarrow$ $AH \perp CB$ (simetrie) (2).

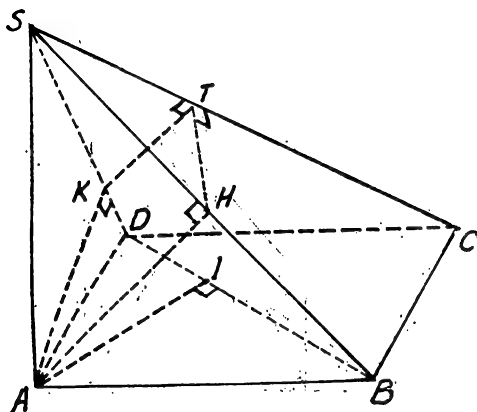



*Fig. VIII.G.21.*

Din (1) şi (2) $AH \perp (SB, CB) \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

c) Analog cu demonstraţia de la punctul b), se arată că şi $AK \perp \perp (SDC)$ (1).

Din $AH \perp (SBC)$ şi $HT \perp SC$ ($T \in SC$), (ipoteză) $\Rightarrow AT \perp SC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (2). Să reţinem că într-un plan ($SAC$) dintr-un punct $A$ exterior unei drepte $SC$ se poate duce pe acea dreaptă o perpendiculară şi numai una (3).

Din $AK \perp (SDC)$ (conform (1)) și presupunînd $KT' \perp SC$ ($T' \in SC$) (ipoteză) $\Rightarrow AT' \perp SC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (4).

Conform (3) $T = T'$ În concluzie, perpendicularele duse din $H$ şi $K$ pe dreapta $SC$, concurează în punctul notat $T$ care este proiecţia punctului $A$ pe dreapta $SC$.

VIII.G.22.

1. $AE \perp BC$ (ipoteză) (1). Cum $DC \perp (ABC)$ (ipoteză) $\Rightarrow CD \perp AE$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow AE \perp (BCD) \Rightarrow AE \perp BD$ (3). Deoarece $AF \perp BD$ (ipoteză şi $AE \perp (BCD)$) $\Rightarrow EF \perp BD$ (4) (reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare).

Din (3) şi (4) $BD \perp (EF, AE) \Rightarrow BD \perp (AEF)$ (5).

Conform teoremei : dacă o dreaptă „$a$" este perpendiculară pe un plan „$\alpha$", atunci orice plan $\beta$ care conţine drepte „$a$" este perpendicular pe planul „$\alpha$", rezultă că planul ($ABD$), care conţine dreapta $BD$ perpendiculară pe planul ($AEF$) va fi perpendicular pe planul ($AEF$). Aşadar, răspunsul este $(ABD) \perp (AEF)$ (6). (Vezi fig. VIII.G.22.)

2. a) În ipoteză $m(\widehat{CAB}) = 90° \Rightarrow BA \perp AC$ (1). Cum $DC \perp (ABC)$ (ipoteză) $\Rightarrow DC \perp BA$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow BA \perp (ADC)$ (3). Deoarece planul ($ABD$) conţine dreapta $AB$ perpendiculară pe planul ($ACD$), urmează — prin teorema de mai sus — ca planul $(ABD) \perp (ACD)$ (4).

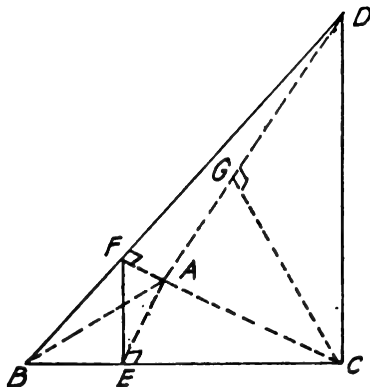



*Fig. VIII.G.22.*

b) Ştim că $(AEF) \perp (ABD)$ (conform 1.6). Arătăm că dreapta $CG$ este şi ea perpendiculară pe planul $(ABD)$ : $CG \perp AD$ (ipoteză) (1). Cum $AB \perp (ACD)$ (conf. 2.3) $\Rightarrow AB \perp CG$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow CG \perp (ABD)$ (3). În concluzie, planul $(AEF)$ şi dreapta $CG$ sînt paralele.

**VIII.G.23.**

a) Deoarece $AO \perp OC$ şi $AO \perp OB$, (ipoteză) $\Rightarrow AO \perp (ABC)$ (1). Construm $AA_1 \perp BC$ (2) din (1) şi (2) $\Rightarrow OA_1 \perp BC$ (3) (o reciprocă a teoremei celor trei perpendiculare). Cum $\triangle BOC$ este dreptunghic ($OB \perp \perp OC$ = ipoteză) $\Rightarrow$ punctul $A_1$ se găseşte între $B$ şi $C$ (4). În $\triangle ABA_1$, $AA_1 \perp BC \Rightarrow m(\widehat{ABA_1}) < 90°$. (Vezi fig. VIII.G.23.)

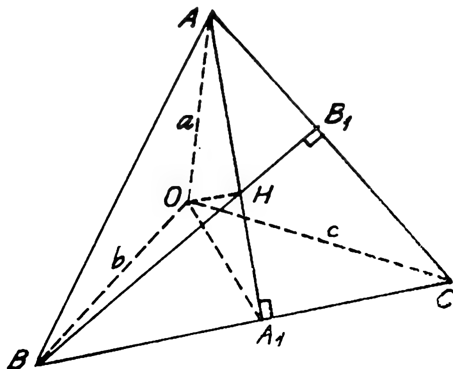



*Fig. VIII.G.23.*

Tot aşa se arată că în $\triangle AA_1C$ ($AA_1 \perp BC$), $m(\widehat{ACB}) < 90°$. Pentru a demonstra că şi măsura unghiului $BAC$ este mai mică decît 90°, procedăm asemănător ca în demonstraţia precedentă, ducem $BB_1 \perp BC$ ($B_1 \in BC$) şi repetăm raţionamentele făcute, schimbînd notaţia triunghiului dreptunghic $ABA_1$ în $BAB_1 \Rightarrow m(\widehat{BAB_1}) < 90°$. În concluzie, în ipotezele date, $\triangle ABC$ are toate unghiurile ascuţite.

b) În $\triangle AOA_1$, ducem $OH \perp AA_1$ ($H \in AA_1$) (1). Cum $BC \perp OA_1$ (conform a3) şi $BC \perp AO$ (conform a1) $\Rightarrow BC \perp (AOA_1) \Rightarrow BC \perp OH$ (2).

Din (1) şi (2) $\Rightarrow OH \perp (BC, AA_1) \Rightarrow OH \perp (ABC)$ (3).

Repetăm raţionamentele, ducînd în triunghiul dreptunghic $BOB_1$ ($BO \perp OB_1$ — ipoteză) înălţimea $OP$ ($P \in BB_1$) şi concluzionăm $OP \perp \perp (ABC)$. Cum, dintr-un punct exterior unui plan dat se poate duce pe planul dat o perpendiculară şi numai una, rezultă că $OP = OH \Rightarrow P = H$ şi deoarece acest punct aparţine înălţimii $BB_1$ cît şi înălţimii $AA_1$, rezultă că el este chiar punctul de intersecţie al înălţimilor triunghiului $ABC$. În concluzie, piciorul perpendicularei duse din punctul $O$ pe planul $ABC$ este chiar ortocentrul triunghiului $ABC$.

În triunghiul dreptunghic $BOC$, $OA_1 = \frac{b \cdot c}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{bc\sqrt{b^2+c^2}}{b^2+c^2}$. În triunghiul dreptunghic $AOA_1$,

$$AA_1 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2c^2(b^2+c^2)}{(b^2+c^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2(b^2+c^2)+b^2c^2}{b^2+c^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2+c^2}}$$

apoi, ţinînd cont că în $\triangle AOA_1$, $OH \perp AA_1$ (construcţie), avem că :

$$OH = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \sqrt{b^2+c^2}}{b^2+c^2} \cdot \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} = \frac{abc \cdot \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

**VIII.G.24.**

$S^2_{OCA} = \frac{a^2c^2}{4}$ (ipoteză $OA \perp OB$) ; (1)

$S^2_{OAB} = \frac{a^2b^2}{4}$ (ipoteză $OA \perp OB$). (2)

Construim $OD \perp BC$ şi notăm $OD = x$. (3)

Cum $OA \perp (BOC)$ (ipoteză) şi $OD \perp BC$ (construcţie) $\Rightarrow$ $AD \perp BC$ (conform teoremei directe a celor trei perpendiculare). Notăm $AD = y$. (4)

(Vezi fig. VIII.G.24.). Rezultă $S^2_{OBC} = \frac{BC^2 \cdot x^2}{4}$ (din 3) şi (5)

$S^2_{ABC} = \frac{BC^2 \cdot y^2}{4}$ (din 4). (6)

În ipoteză $S^2_{ABC} = S^2_{OBC} + S^2_{OCA} + S^2_{OAB}$ înlocuim relaţiile (1), (2), (5) şi (6).

$$\frac{BC^2 \cdot y^2}{4} = \frac{BC^2 \cdot x^2}{4} + \frac{a^2c^2}{4} + \frac{a^2b^2}{4} + \Leftrightarrow \frac{BC^2}{4}(y^2 - x^2) = \frac{a^2}{4}$$ [illegible] $c^2)$.

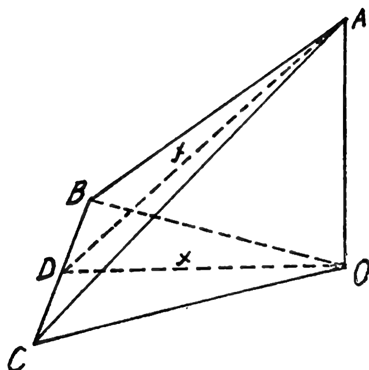



*Fig. VIII.G.24.*

Cum $y^2 - x^2 = a^2$ obţinem $BC^2\ a^2 = a^2(b^2 + c^2) \Rightarrow BC^2 = b^2 + c^2$. Conform teoremei reciproce a lui Pitagora triunghiul $BOC$ este dreptunghic în $O$ adică $OC \perp OB$. În concluzie, conform cu demonstraţia făcută relaţia $OB \perp OC$ este adevărată.

**VIII.G.25.** Pentru a construi punctele $M, N, P, Q$ procedăm astfel din $O$ ducem o perpendiculară pe planul $ABCD$. Fie $O'$ piciorul acestei perpendiculare. Din punctul $O'$ ducem perpendiculare pe laturile paralelogramului astfel $O'M \perp AB$ ($M \in AB$) ; $O'N \perp BC$ ($N \in BC$) ; $O'P \perp CD$ ; $O'Q \perp AD$ (Vezi fig. VIII.G.25.) (conform teoremei celor trei perpendi-

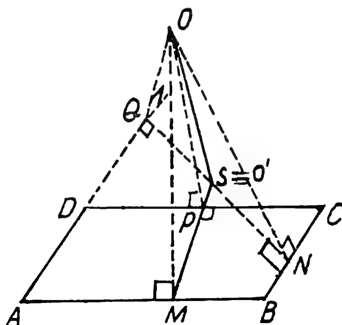



*Fig. VIII.G.25.*

culare — directă). Cum $AB \| CD$ şi $BC \| AD$ (ipoteză) $\Rightarrow$ punctele $M$, $P$, $O'$ şi $N$, $Q$, $O'$ sînt coliniare $\Rightarrow$ intersecţia dreptelor $MP$ şi $NQ$ este tocmai punctul $O'$, care a fost notat în textul problemei $S$ — deci $O' = S$. Deoarece construcţia punctelor $M, N, P, Q$ a presupus $OO' \perp (ABCD)$ ; concluzia $OS \perp (ABCD)$ este evidentă.

**VIII.G.26.**

Deoarece $A'D \perp AA'$ (ipoteză), urmează că dreapta $A'D$ se găseşte într-un plan perpendicular pe dreapta $AA'$. Fie $\alpha$ acest plan. Cum $AA' \perp$ $\perp (ABC)$ rezultă :

$$\alpha \| (ABC). \tag{1}$$

Deoarece $DB \perp AB$ (ipoteză) urmează că dreapta $DB$ se găseşte conţinută într-un plan perpendicular pe dreapta $AB$. Fie $\beta$ acest plan. (Vezi fig. VIII.G.26.) Cum $AC \perp AB$ (ipoteză) şi $AA' \perp AC$ (ipoteză), urmează că dreptele $AA'$ şi $AC$ sînt paralele cu planul $\beta$ deci :

$$\beta \| (AA'C). \tag{2}$$

Deoarece planele $\alpha$ şi $\beta$ sînt paralele cu planele $(ABC)$ şi $(A'AC)$ (conform (1) şi (2)) care sînt concurente după dreapta $AC$, urmează că planele $\alpha$ şi $\beta$ se interesectează după o dreaptă paralelă cu $AC$. Fie $d$ această dreaptă şi din $d \| AC \Rightarrow d \perp (AA'B)$. (3)

*Fig. VIII.G.26.*

Notăm $D'$ piciorul acestei perpendiculare pe planul $(AA'B)$. Din ipotezele problemei $D \in \alpha \cap \beta \Rightarrow D \in d$.

Cum $A'D' \perp d$ şi $A'D' = a$ iar $A'D = a\sqrt{2}$ (ipoteză), punctul $D$ îl construim ducînd în $\alpha$ un cerc de centru $A'$ şi raza $A'D = a\sqrt{2}$. Construcţia are 2 soluţii, $D$ şi $D_1$ fiind punctele situate de o parte şi de alta a planului $AA'B$. Convine doar soluţia cu $D$ în acelaşi semispaţiu cu $C$. Rezultatele ne sugerează următoarea construcţie ducînd prin $A'$ parelele la $AB$ şi $AC$ obţinem planul $\alpha$. Ducînd prin $B$ paralele la $AA'$ şi $AC$ obţinem planul $\beta$. Intersecţia planelor $\alpha$, $(AA'B)$ şi $\beta$ va fi punctul $D'$, iar $DD' \perp (AA'B)$.

Cum $\triangle DD'A'$ este dreptunghic (conform 3) şi $AA'BD'$ este pătrat (demonstrat) $\Rightarrow DD' = \sqrt{2a^2 - a^2} = a$. Fie $D''$ proiecţia punctului $D$ pe planul planul $(AA'C) \Rightarrow DD''' = A'D' = a \Rightarrow AA'CD'''$ pătrat (construcţie) $\Rightarrow CD''DD'''$ pătrat (construcţie) $\Rightarrow CD, CB, BD$ sînt diagonalele unor pătrate de latura $a$, deci, $\triangle BCD$ echilateral de latura $a\sqrt{2}$.

**VIII.G.27.**

Directă Dacă $DO \perp (ABC)$ (1) şi $AD \perp BC$ (2) $\Rightarrow AO \perp BC$.

Demonstraţie : Din (1) $\Rightarrow DO \perp BC$ (3). Din (2) şi (3) $\Rightarrow BC \perp (ADO) \Rightarrow BC \perp AO \Rightarrow AO \perp BC$ (simetrie). (Vezi fig. VIII.G.27.)

Reciprocă Dacă $DO \perp (ABC)$ (1) şi $AO \perp BC$ (2) $\Rightarrow AD \perp BC$.

Demonstraţie Din (1) $\Rightarrow DO \perp BC$ (3). Din (2) şi (3) $\Rightarrow BC \perp (AOD) \Rightarrow BC \perp AD \Rightarrow AD \perp BC$ (simetrie).

Observaţie putem considera directa dreptă reciprocă şi invers.

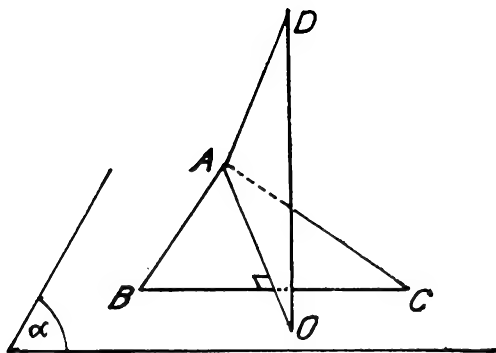



*Fig. VIII.G.27.*

**VIII.G.28.**

Directă Dacă $MA = MB = MC$ (1) şi $OA \equiv OB \equiv OC$ (2) atunci $OM \perp (ABC)$. (Vezi fig. VIII.G.28.)

Demonstraţie : Presupunem că $MO$ nu este perpendiculară pe $(ABC)$ şi ducem $MO' \perp (ABC)$, $O' \in (ABC)$ şi $O' \neq O$. $\Rightarrow$ $\triangle MO'A \equiv \triangle MO'B \equiv \equiv \triangle MO'C$, deoarece sînt triunghiuri dreptunghice, cu cateta comună $MO'$ şi ipotenuzele congruente (conform 1). Rezultă $O'A \equiv O'B \equiv O'C$, deci $O'$ este centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$ (intersecţia mediatoarelor). Atunci $O' = O$, deoarece centrul cercului circumscris unui triunghi este un punct unic, rezultă $OM \perp (ABC)$.

Reciprocă : dacă $MO \perp (ABC)$ (1) şi $OA \equiv OB \equiv OC$ (2) $\Rightarrow$ $MA \equiv \equiv MB \equiv MC$.

Demonstraţie : din ipoteza (1) şi (2) $\Rightarrow$ $\triangle MOA \equiv \triangle MOB \equiv \equiv \triangle MOC$ fiind triunghiuri dreptunghice (conform 1), avînd o catetă comună $MO$ şi catetele $OA$, $OB$, $OC$ congruente (conform 2) $\Rightarrow$ $MA \equiv \equiv MB \equiv MC$.

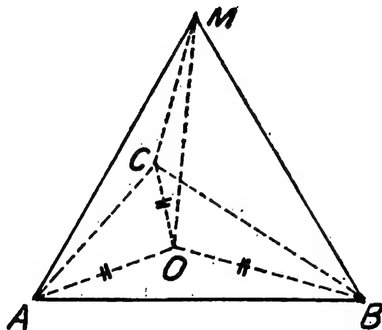



*Fig. VIII.G.28.*

**VIII.G.29.** a) Notăm $EN = x$ ; $AC \cap BD = \{O\}$. Cum $AO \perp DB$ (ipoteză, diagonalele rombului sînt perpendiculare) și $MA \perp (ABCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $MO \perp BD$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (1).

Asemănător, $NO \perp BD$ (2). (Vezi fig. VIII.G.29.)

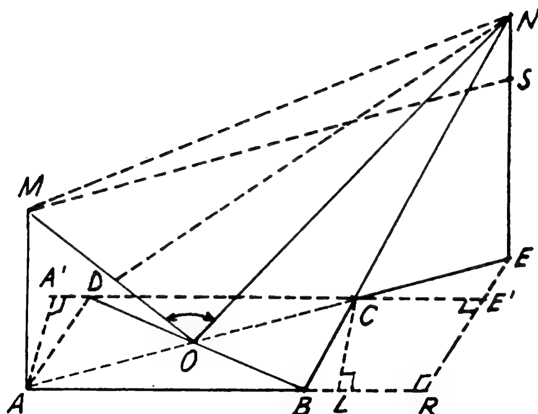



*Fig. VIII.G.29.*

Deoarece muchia diedrului determinat de planele $(MBD)$ și $(NBD)$ este $BD$ și din (1) și (2) $\Rightarrow$ unghiul plan corespunzător acestui diedru este $MON$. În ipoteză $m(\widehat{MON}) = 90° \Rightarrow MN^2 = MO^2 + NO^2$, relație care care devine după înlocuiri succesive (folosind triunghiurile dreptunghice $MAO$ și $NEO$ — ipoteză) : $MN^2 = (AM^2 + AO^2) + (NE^2 + EO^2)$ ; $MN^2 = (50^2 + 16^2) + (x^2 + 34^2)$ (3) (căci $EO = AE - AO = 56 - 16$).

Apoi, în planul $MAE$, ducem $MS \perp NE$ ($S \in NE$) și în triunghiul dreptunghic $MSN$, evaluăm din nou $MN$.

$MN^2 = MS^2 + SN^2$ ; $MN^2 = 50^2 + (x - 50^2)$ ($MS \equiv AE$ deoarece patrulaterul $MAEN$ este dreptunghic — din construcție) (4).

Egalînd relațiile (3) și (4) obținem : $50^2 + 16^2 + 34^2 + x^2 = 50^2 + 50^2 + x^2 - 100x \Rightarrow 100x - 50^2 - 16^2 - 34^2 \Rightarrow 100x = 84 \cdot 16 - 16^2 = 16(84 - 16) = 16 \cdot 68$.

$x = 8 \cdot 34 : 25 = 272 : 25$ ; $x = 10{,}8$ cm.

Observație : deoarece $(x - 50)^2 = (50 - x)^2$ nu are importanță dacă în ilustrarea grafică punctul $S$ se găsește sau nu între punctele $N$ și $E$.

b) Calculăm lungimea $OB$ ($\triangle AOB$ dreptunghic — ipoteză) $OB^2 = AB^2 - AO^2 \Rightarrow OB = 12$ cm. Evaluăm aria rombului $ABCD$. Aria $ABCD = 24 \cdot 32 : 2 = 12 \cdot 32$ cm$^2$ (1).

Notăm piciorele perpendicularelor din $E$ și $A$ pe dreapta $DC$, $E'$ și respectiv $A'$. Prelungim $EE'$ și notăm $R$ intersecția dintre $EE'$ și $AB$, apoi construim $CL \perp AB$ ($L \in AB$). Aria rombului $ABCD$ este și $AB \cdot CL = 20 \cdot CL$ (2).

Egalînd relațiile (1) și (2), obținem $32 \cdot 12 = 20 \cdot CL \iff CL = = \frac{32 \cdot 6}{10} = \frac{32 \cdot 3}{5}$ cm.

Deoarece $AA'RE'$ este dreptunghi (construcție) $\Rightarrow A'E \equiv AR$ este suficient să calculăm $AR$. Cum $\triangle ACL \sim \triangle ARE$ $(CL \parallel ER) \Rightarrow \frac{AC}{AE} =$

$$= \frac{AS}{AR} \text{ dar } AL = \sqrt{32^2 - \frac{32^2 \cdot 3^2}{5^2}} = \frac{\sqrt{32^2 \cdot 5^2 - 32^2 \cdot 3^2}}{5} = \frac{32 \cdot 4}{5} = \frac{128}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AR = AE \cdot AL : AC = 50 \cdot \frac{128}{5} : 32 = 1\,280 : 32 = 40 \text{ cm}.$$

În concluzie, $A'E' = AR = 40$ cm.

**VIII.G.30.** a) Din $MO \perp (ABCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow MO \perp CP$. (1)

Din $CP \perp DB$ (ipoteză) $\Rightarrow CP \perp (DMB)$. (2)

Oricare ar fi planul care conține dreapta $CP$, va fi un plan perpendicular pe planul $(MDB)$. În cazul de față planul $(PQC) \perp (MDB)$. (Vezi fig. VIII.G.30.)

b) Ducem $PR \perp MD$ (1) $(R \in MD)$. Din (1) și (2a) $\Rightarrow CR \perp DM$ conform teoremei celor trei perpendiculare) (2). Muchia diedrului format de planele $(PQC)$ și $(PRC)$ este dreapta $PC$. Deoarece $PQ \perp PC$ (conform 2a) și $RP \perp PC$ (conform 2a) $\Rightarrow$ unghiul plan corespunzător diedrului în discuție este $RPQ$. Cum ipoteza presupune plane perpendiculare $m(\widehat{RPQ}) = 90° \Rightarrow QP \perp PR$ (3) $\Rightarrow MPRQ$ este dreptunghi deoarece $PQ \perp MB$ (reciproca teoremei celor trei perpendiculare) și $PR \perp MD$ (construcție) $\Rightarrow m(RMB) = 90° \Rightarrow$ triunghiul $DMB$ dreptunghic în $M$. Cum în $\triangle DMB$, $MO$ este înălțime și mediană (ipoteză) $\Rightarrow \triangle DMB$ este și isoscel $\Rightarrow MO = \frac{DB}{2} = \frac{AC}{2}$ (ipoteză diagonalele dreptunghiului sînt congruente). (Vezi fig. VIII.G.30.)

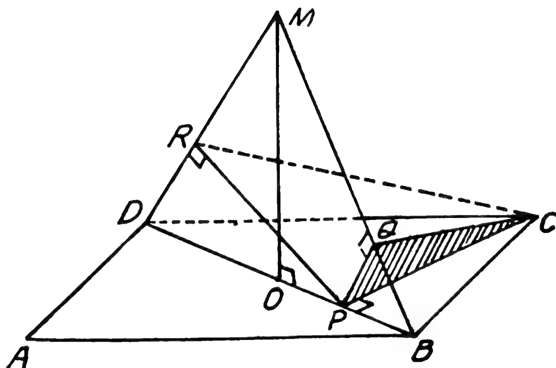



*Fig. VIII.G.30.*

În concluzie, în ipotezele date propoziția $MO = \frac{AC}{2}$ este adevărată.

**VIII.G.31.** a) Deoarece $MA \perp (ABCD)$ (ipoteză) și $AD \perp DC$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $MD \perp DC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) $\Rightarrow$ $\triangle MDC$ este dreptunghic în $D$. (1). (Vezi fig. VIII.G.31.)

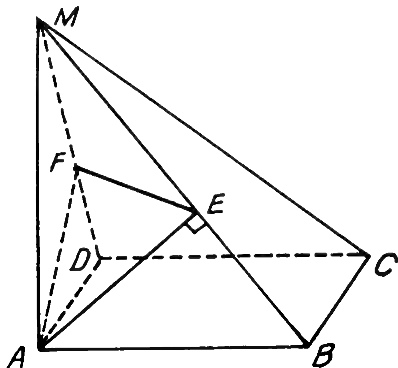



*Fig. VIII.G.31.*

În triunghiul dreptunghic $MAD$ (ipoteză) $AD < MD$, adică $x < MD$. ($x \in \mathbf{N}^*$).

În triunghiul dreptunghic $MDC$ (conform 1) $MD < MC$ (pentru ambele inegalități : într-un triunghi dreptunghic, o catetă este mai mică decît ipotenuza) $\Rightarrow$ laturile care pot avea ca lungimi numere naturale consecutive sînt : $DC = x$ ; $DM = x + 1$ ; $MC = x + 2$.

Conform teoremei lui Pitagora $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$ ; ecuație care după efectuarea calculelor devine :

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x^2 - 2x + 1 - 4 = 0 \iff (x-1)^2 - 4 = 0 \iff$$

$$\iff (x - 1 + 2)(x - 1 - 2) = 0 \iff \left\{\begin{array}{c} x + 1 = 0 \\ \text{sau} \\ x - 3 = 0 \end{array}\right.$$

și, deoarece $x \in \mathbf{N}^*$, soluția unică este : $x = 3$. În aceste condiții laturile $\triangle MDC$ sînt 3, 4, 5.

b) Ducem $AF \perp MD$ (1). Cum $DC \perp AD$ — (ipoteză) și $CD \perp MD$ (demonstrat) $\Rightarrow$ $DC \perp (ADM)$, adică $DC \perp AF$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $AF \perp (MDC)$ deci $AF$ reprezintă distanța de la $A$ la planul $MDC$. (Vezi fig. VIII.G.31.) În triunghiul dreptunghic $MAD$ (conform 1a), $AF = \frac{AD \cdot AM}{MD}$. În ipoteza (a) $AD = 3$, $MD = 4$ ; $AM = \sqrt{7}$ $\Rightarrow$ $AF = \frac{3 \cdot \sqrt{7}}{4}$.

c) În $\triangle MAB$ dreptunghic (ipoteză), ducem $AE \perp MB$. (Vezi fig. VIII.G.31.). Cum triunghiurile dreptunghice $MAD$ și $MAB$ sînt congruente (catetă, ipoteză) $\Rightarrow$ înălțimile corespunzătoare ipotenuzelor congruente, sînt congruente, adică : $AF \equiv AE \Rightarrow DF \equiv BE$. În $\triangle MDB$ care este isoscel (demonstrat), rapoartele $\frac{MF}{MD}$ și $\frac{ME}{MB}$ sînt egale (demonstrat) $\Rightarrow$ $\Rightarrow EF \parallel DB \Rightarrow EF \parallel (ABCD)$ (fiind paralelă cu dreapta $DB$ din planul $ABCD$).

**VIII.G.32.** Notăm triunghiul dreptunghic $ABC$ ($m(\widehat{A}) = 90°$) și presupunem $AB = 7$ și $AC = 24 \Rightarrow BC = 25$ (Pitagora) Apoi notăm $\beta$ planul care trece prin ipotenuză și face cu planul $(ABC)$ un unghi de 30°. Fie $AD \perp BC$. Prin dreapta $AD$, ducem un plan $\alpha$ perpendicular pe planul $(ABC)$, ducînd, de exemplu, $AE \perp (ABC)$. (Vezi fig. VIII.G.32.) Planul determinat de $AE$ și $AD$ este tocmai planul $\alpha$. Acesta intersectează planul $\beta$ după o dreaptă $DF$. Cum $BC \perp AD$ (construcție) și $BC \perp AE$ (construcția planului $\alpha$) $\Rightarrow BC \perp \alpha \Rightarrow BC \perp DF$.

Așadar, dreptele $AD \subset (ABC)$ și $FD \subset \beta$ sînt perpendiculare pe muchia $BC$ a diedrului determinat de planele $(ABC)$ și $\beta \Rightarrow \widehat{ADF}$ este unghiul plan corespunzător diedrului în discuție $\Rightarrow$ construim în planul $\alpha$, $AP \perp DF$ ($P \in DF$).

În $\triangle APD$ (dreptunghic în $P$), $m(\widehat{ADP}) = 30°$ (ipoteză) iar în triunghiul dreptunghic $ABC$ avem că : $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{7 \cdot 24}{25} \Rightarrow AP$ care este distanța de la punctul $A$ la planul $\beta$ (construcție) are măsura lungimii $AP = \frac{AD}{2} = \frac{7\ 12}{25} = \frac{84}{25} = 3{,}36$ cm. Așadar, distanța de la $A$ la planul $\beta$ este $AP = 3{,}36$ cm.

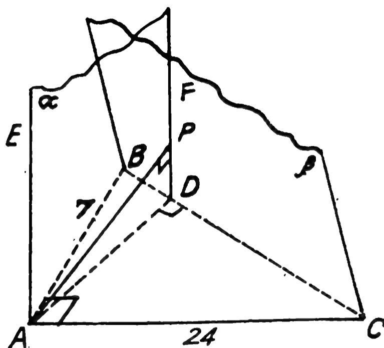



*Fig. VIII.G.32.*

**VIII.G.33.** Din $AD \perp (ABC)$ (ipoteză) și $DE \perp BC$ (ipoteză) $\Rightarrow AE \perp BC$ (conform unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.33.)

*Fig. VIII.G.33.*

Deoarece $\triangle ABC$ este echilateral, înălțimea $AE$ este și mediana laturii $BC$. $CE \equiv EB$ deci și mediatoarea acesteia $\Rightarrow$ centrul cercului circumscris $\triangle ABC$ se găsește pe $AE$ și anume situat la $\frac{1}{3}$ de latura $BC$ și la $\frac{2}{3}$ de vîrful $A$ $\Rightarrow$ Aria $\triangle DAO =$ (dreptunghic în $A$, ipoteză) $\frac{AO \cdot AD}{2}$

a) Urmează să calculăm $AO$ conform cu raționamentele făcute. Mai întîi calculăm lungimea segmentului $AE$ $AE = 9$ cm (se calculează conform teoremei lui Pitagora, în $\triangle$ dreptunghic $AEB$ — construcția punctului $E \Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ cm).

Așadar aria $\triangle DAO = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ cm$^2$, iar perimetrul triunghiului $DAO$ va fi: $AO + AD + DO = 6 + 8 + 10 = 24$ cm (unde $DO = \sqrt{AO^2 + AD^2}$).

b) În $\triangle DOE$ înălțimea relativă laturii $OE$ este tocmai $DA$ (ipoteză $AD \perp (ABC)$. Cum $OE = \frac{AO}{2}$ (apotema triunghiului echilateral este jumătate din raza cercului circumscris) rezultă $OE = 3$ și deci aria $\triangle DOE = \frac{OE \cdot AD}{2} = \frac{3 \cdot 8}{2} = 12$ cm$^2$.

c) Cum $BC \perp DE$ (ipoteză) și $BC \perp AE$ (demonstrat) $\Rightarrow$ unghiul plan corespunzător diedrului determinat de planele $(ABC)$ și $(DBC)$ este tocmai unghiul $DEA$. (Vezi fig. VIII.G.33.) În triunghiul dreptunghic $ADE$ (ipoteză) tg $(\widehat{DEA}) = \frac{AD}{AE} = \frac{8}{9}$.

**VIII.G.34.** a) Pentru că $SM \perp (ABCD)$ (ipoteză), construim $MN \perp AB$, ($N \in AB \Rightarrow SN \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.34.) $\Rightarrow$ $SN$ este înălțimea triunghiului $SAB$. Deoarece $DM = MC$ (ipoteză) și $MN \perp DC$ (construcția $MN \perp AB$) $\Rightarrow$ $MN \perp DC$, căci $AB \parallel DC$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $MN$ este mediatoarea laturii $DC$. Cum $ABCD$ este

trapez isoscel (ipoteză) $\Rightarrow$ $MN$ este şi mediatoarea laturii $AB$ deci $AN = NB \Rightarrow MN$, este axa de simetrie pentru trapezul $ABCD$. $\Rightarrow \triangle SAB$ este isoscel ($SN$ este înălţime conform teoremei celor trei perpendiculare $SN \perp AB$, dar şi mediana laturii $AB$) $\Rightarrow$ Aria $\triangle SAB = \frac{AB \cdot SN}{2}$. Calculul lungimilor $AB$ şi $SN$.

Pentru a calcula lungimea $AB$, ducem $CE \perp AB$, ($E \in AB$). Deoarece $m(\widehat{CBN}) = 30°$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $CE = \frac{CB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm $\Rightarrow$ $EB = 3 \cdot \sqrt{3}$ cm. Deoarece $AB = 2 \cdot EB + DC$ trapezul fiind isoscel şi $DC \equiv CB$, urmează că $AB = 6 + 6\sqrt{3} = 6(1 + \sqrt{3})$ cm.

Pentru a calcula lungimea segmentului $SN$ aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle$ dreptunghic $SMN$ (ipoteză):

$SN^2 = SM^2 + MN^2$; $SN^2 = 3 + MN^2$. Cum $MN \equiv CE$ (ambele reprezentînd distanţa dintre dreptele paralele ale trapezului $AB$ şi $DC$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow SN = 3 + 9 = 12$; $SN = 2\sqrt{3}$.

Aşadar. Aria $\triangle SAB = \frac{AB \cdot SN}{2} = \frac{6(1+\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$ cm$^2$.

b) Planul $SMN$ conţine dreptele concurente ($SM \perp (ABCD)$) şi $MN$, mediatoarea segmentelor $AB$ şi $CD$) $\Rightarrow$ $(SMN) \perp (ABCD)$ şi orice punct din acest plan este egal depărtat de capetele segmentelor $AB$ şi $CD$. Acest plan se numeşte „planul mediator" al segmentelor $AB$ şi $CD$. Cum, muchia diedrului determinat de planele $SAB$ şi $ABCD$, dreapta $AB$, este perpendiculară pe $SN$ şi $MN$ (demonstrat) $\Rightarrow$ unghiul plan corespunzător diedrului de mai sus este chiar $SNM$ $\Rightarrow$. În $\triangle$ dreptunghic $SMN$ (ipoteză) $\text{tg}\widehat{SNM} = \frac{SM}{MN} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(\widehat{SNM}) = 30°$. În concluzie, măsura unghiului plan care corespunde diedrului în cauză este de 30°.

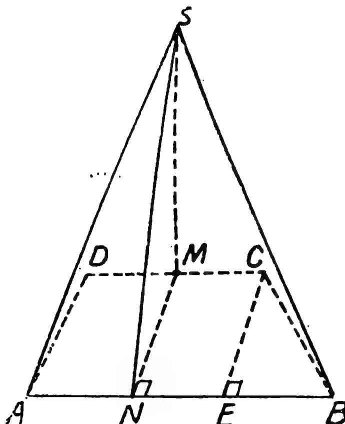


Fig. VIII.G.34.

**VIII.G.35.** a) Construcţia punctului I. (Vezi fig. VIII.G.35.)

Deoarece $AO \perp OC$ şi $AO \perp OB$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $AO \perp (COB)$.

În planul $COB$ ducem $OI \perp CM$, $(I \in CM)$ $\Rightarrow$ $AI \perp CM$, (conform teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.35.)

Calculul segmentelor $OI$ şi $AI$

Pentru a calcula lungimea segmentului $OI$ raţionăm astfel $OI$ este înălţime în $\triangle$ dreptunghic $COM$ (ipoteză şi construcţia precedentă) $\Rightarrow$

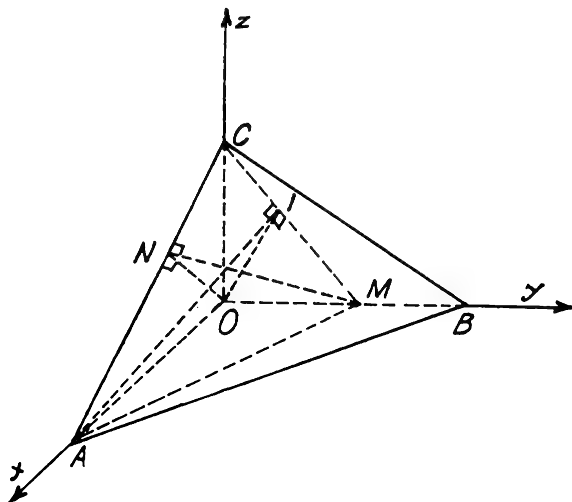



*Fig. VIII.G.35.*

$\Rightarrow OI = OC \cdot OM : MC$. Evaluăm lungimile acestor segmente : $OC = c$ (ipoteză) ; $OM = OB : 2 = 2b : 2$ ; $OM = b$ (ipotezele $OB = 2b$ şi $OM \equiv MB$) ; $CM = \sqrt{b^2 + c^2}$ (Pitagora în $\triangle$ dreptunghic $COM$ — ipoteză) $\Rightarrow$

$$OI = \frac{c \cdot b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{b \cdot c\sqrt{b^2 + c^2}}{b^2 + c^2}.$$

Pentru a calcula lungimea segmentului $AI$ aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle$ dreptunghic $AOI$ ($m(\widehat{AOI}) = 90°$ — ipoteză) : $AI^2 = AO^2 + OI^2 \Rightarrow AI = \sqrt{a^2 + \frac{b^2c^2}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{b^2 + c^2}}$

b) Muchia diedrului respectiv este dreapta $AC$. Ducem un plan perpendicular pe această muchie. Acesta va conţine două drepte concurente, perpendiculare pe $AC$ şi conţinute în planele $AMC$ şi $AOC$. Unghiul acestor drepte este tocmai unghiul plan corespunzător diedrului dat (definiţie). Procedăm astfel : deoarece $MO \perp (AOC)$ (ipoteză) (1), ducem în planul $(AOC)$ $ON \perp AC$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ $MN \perp AC$ (conform teoremei directe a celor trei perpendiculare) (3). Rezultă că planul descris

mai sus este planul determinat de dreptele concurente $MN$ și $ON$ și unghiul plan căutat este $MNO$ (ambele drepte fiind perpendiculare pe $AC$ și conținute în planele $AMC$ și $AOC$). Cum $MON$ este dreptunghic în $O$ (ipoteză $MO \perp ON$), $\operatorname{tg}(\widehat{MNO}) = \dfrac{OM}{ON}$ Deoarece $OM = b$ (ipoteză), calculăm $ON$ în $\triangle$ dreptunghic $AOC$ $OC = \dfrac{OA \cdot OC}{AC} = \dfrac{\sqrt{a^2 + c^2}}{a \cdot c}$ și deci

$$\operatorname{tg}(\widehat{MNO}) = \frac{b \cdot \sqrt{b^2 + c^2}}{a \cdot c}$$

c) Deoarece $OI \perp CM$ (construcție) oricare ar fi poziția punctului $M \in OB$, rezultă că în triunghiul dreptunghic $OIC$, ipotenuza $OC$ are lungimea constantă $OC = c$. Așadar, în ipotezele problemei, toate punctele de felul punctului $I$ se vor găsi în planul $COB$ și vor fi vîrfurile unor triunghiuri dreptunghice construite în planul $COB$ și care au ipotenuza comună $OC = c$. Aceste puncte le construim astfel : în planul $COB$ (și de aceeași parte cu punctul $B$ construim un semicerc de diametru constant $OC = c$). Orice punct $I$ de pe acest semicerc conduce la $m(\widehat{OIC}) = 90°$ (proprietate comună a punctelor $I$). Oricare alt punct $I$ din $(COB)$ care nu se află pe semicercul de mai sus nu are proprietate $m(\widehat{OIC}) = 90°$ ; deoarece, dacă $I'$ se găsește în afara semicercului construit, $m(\widehat{OI'C}) < 90°$, și, dacă $I'$ se află în interiorul semicercului construit, $m(\widehat{OI'C}) > 90°$.

Spunem „locul geometric al punctului $I$ cînd $M$ descrie segmentul $AB$ și $AI \perp CM$ (ceea ce conduce la $m(\widehat{OIC}) = 90°$), este un arc de cerc inclus în semicercul din planul $COB$ al cărui diametru este segmentul constant $OC = c$". Să observăm : dacă $O = M$ atunci $I = O$, iar dacă $M = B$, $I$ va fi în $\triangle COB$ piciorul înălțimii (punct fix) relative ipotenuzei $BC$. În acest fel capetele arcului de cerc sînt punctele $O$ și $I$ (fix).

**VIII.G.36.** a) Deoarece $MN \perp (ABCD)$ (1) ducem $MR \perp AB$ (Vezi fig. VIII.G.36b.) (2) $\Rightarrow$ $NR \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (3). În triunghiul dreptunghic $NMR$ (ipoteză), calculăm $NR$ (Pitagora), $NR^2 = NM^2 + MR^2$ (4). Cum $NM = \dfrac{48}{5}$ cm (ipoteză), rămîne să evaluăm lungimea segmentului $MR$. De exemplu, procedăm astfel (Vezi fig. VIII.G.36b.)

În $\triangle ABD$ ducem $DS \perp AB$ ($S \in AB$). Cum $MR \perp AB$ (construcție) $\Rightarrow$ $\triangle AMR \sim \triangle ADS$ și raportul de asemănare este $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{1}{5}$ (ipoteză)

$$\frac{MR}{DS} = \frac{1}{5} \text{ (5).}$$

Așadar, mai trebuie evaluat $DS$. Aria $\triangle ADB = \dfrac{DB \cdot AO}{2} = \dfrac{AB \cdot DS}{2}$ ($O$ fiind intersecția diagonalelor rombului) și deci,

$$\frac{12 \cdot AO}{2} = \frac{10 \cdot DS}{2}$$

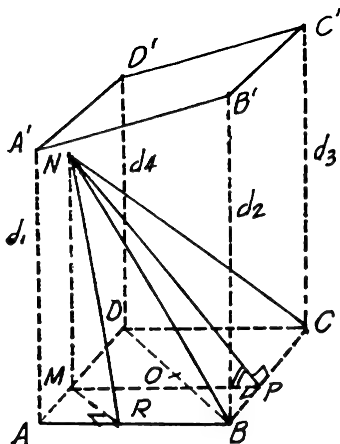



Fig. VIII.G.36.a.

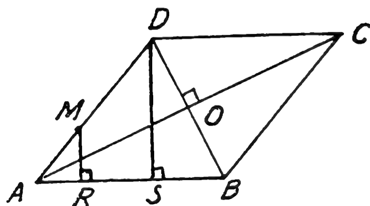



Fig. VIII.G.36.b.

Cum $AO = 8$ cm (din $\triangle$ dreptunghic $AOD$, ipoteza $AC \perp BD$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow DS = \frac{48}{5}$ cm (6). Înlocuim (6) în (5) $MR = \frac{48}{25}$ cm. Înlocuim în (4) și efectuînd calculele obținem $NR = \frac{48 \cdot \sqrt{26}}{25}$ cm.

b) Unghiul plan corespunzător unghiului diedru determinat de planele $NBC$ și $ABCD$ îl obținem ducînd prin $MN$ un plan perpendicular pe $AD$ (implicit pe $BC \parallel AD$). (Vezi fig. VIII.G.36a.) Dreptele de intersecție dintre acest plan și planele $ABCD$ și $NBC$, le notăm $MP$ și respectiv $NP$ ($P \in BC$, muchia diedrului). Cum $MP \perp AD$ și $MP \perp BC$ (construcție) $\Rightarrow$ $MP$, este înălțimea rombului relativă laturii $AD$, ori $MP \equiv$ $\equiv DS$. (Distanțele dintre dreptele paralele $AD \parallel BC$ și $AB \parallel DC$, sînt și înălțimile rombului). Așadar, $MP = \frac{48}{5}$ (conform 6 a). Cum $MN = \frac{48}{5}$ (ipoteză) și $MN \perp (ABCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\text{tg}(\widehat{MNP}) = \frac{MN}{MP} = 1$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{MPN}) = 45°$.

c) Dacă planul $\alpha$ este paralel cu dreapta perpendiculară în $A$ pe planul $ABCD$, atunci el este paralel cu dreptele perpendiculare în $B$, $C$ și $D$ pe planul $ABCD$ și deci punctele $A'$, $B'$, $C'$ și $D'$ sînt puncte la infinit (practic ele nu există). În caz contrar, punctele $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ există și sînt vîrfurile unui paralelogram.

Demonstrație : Notăm dreptele perpendiculare pe $(ABCD)$ și care trec prin $A$, $B$, $C$, $D$, $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$ (ordinea indicilor este ordinea alfabetică a punctelor $A$, $B$, $C$, $D$) (Vezi fig. VIII.G.36.a) $\Rightarrow$ planele $(d_1d_2)$ și $(d_3d_4)$ sînt paralele (ipoteza problemei). Analog, planele $(d_2d_3)$ și $(d_4d_1)$ sînt

paralele. Cum $d_1 \nparallel \alpha \Rightarrow d_1 \cap \alpha = \{A'\}$. Asemănător, $d_2 \cap \alpha = \{B'\}$; $d_3 \cap \alpha = \{C'\}$ şi $d_4 \cap \alpha = \{D'\}$. Cum $(d_1 d_2) \| (d_3 d_4)$ planul $\alpha$ le intersectează după două drepte paralele (teoremă) $\Rightarrow A'B' \| C'D'$.

Asemănător se demonstrează ca $B'C' \| A'D'$. În concluzie: dacă $d_1 \nparallel \alpha$ atunci punctele $A'$, $B'$, $C'$ $D'$ există şi patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.

**VIII.G.37.** Deoarece $MA \perp (ABCD)$ (ipoteză) şi $AO \perp BD$ (diagonalele pătratului sînt perpendiculare) $\Rightarrow MO \perp DB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) $\Rightarrow \triangle MDB$ este isoscel deoarece mediana $MO$ relativă laturii $DB$ ($DO \equiv OB$ — ipoteză) este şi înălţimea relativă laturii $DB$ (demonstrat). Deci, $MD \equiv MB$ (1). Deoarece $MA \perp (ABCD)$ (ipoteză) şi $AB \perp \perp BC$ (ipoteză $ABCD$ este pătrat) $\Rightarrow MB \perp BC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) $\Rightarrow \triangle MBC$ este triunghi dreptunghic: $m(\widehat{MBC}) = 90°$ (2). Analog se demonstrează că $MD \perp DC$ şi deci $\triangle MDC$ este dreptunghic în $D$ : $m(\widehat{MDC}) = 90°$ (3).

Din (1), (2), (3) şi faptul că $ABCD$ este pătrat $\Rightarrow \triangle MBC \equiv \triangle MDC$ (cazul C.C.). (Vezi fig. VIII.G.37.a.)

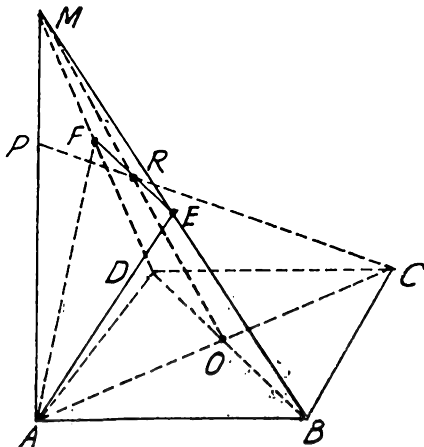



*Fig. VIII.G.37.a.*

Deoarece în triunghiuri congruente medianele relative laturilor congruente sînt congruente, rezultă că în triunghiurile $MBC$ şi $MDC$, medianele $CE$ şi $CF$ (ipotezele $ME \equiv EB$ şi $MF \equiv FD$) sînt congruente: $CE \equiv CF \Rightarrow$ triunghiul $CEF$ este isoscel (4). Conform propoziţiei de mai sus relativă la triunghiurile congruente, în triunghiurile dreptunghice $MAB$ şi $MAD$ (ipoteza $AM \perp (ABCD)$) care sînt congruente (ipoteza $ABCD$ este pătrat), medianele $AE$ şi $AF$ sînt congruente: $AE \equiv AF \Rightarrow$ triunghiul $AEF$ este isoscel (5).

Să precizăm că punctele $M$ și $O$ aparțin planelor $(MAC)$ și $(MDB)$ $\Rightarrow$ $MO$ este dreapta de intersecție a planelor $(MAC)$ și $(MDB)$, iar în $\triangle MDB$, $EF$ este linie mijlocie (ipoteză). (6)

În triunghiul $MDB$, $MO$ este intersectat de linia mijlocie $EF$ (ipoteză) într-un punct, de exemplu $R \Rightarrow MR \equiv RO$ (7) (deoarece în $\triangle MDO$ conform Thales : $\frac{MF}{FD} = \frac{MR}{RO} = 1$), dar și $FR \equiv RE$ (8).

Deoarece $CR \perp EF$ (vezi 4) dar și $CR \subset (MAC)$ $\Rightarrow$ dreapta $MA$ intersectează planul $CEF$ într-un punct notat $P$ (ipoteză) și pe care îl construim prelungind dreapta $CR$ pînă la intersecția cu dreapta $MA$.

a) În triunghiurile isoscele $CEF$ (4) și $AEF$ (5) segmentele $CR$ și $AR$ fiind mediane (conform 8) $\Rightarrow$ $CR \perp EF$ și $AR \perp EF$ $\Rightarrow$ unghiul $ARC$ este unghiul plan corespunzător diedrului format de planele $(CEF)$ și $AEF$.

În $\triangle ARC$ mediana $RO$ are ca lungime jumătate din latura $AC$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $\triangle ARC$ este dreptunghic în $R$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{ARC}) = 90°$ $\Rightarrow$ $(CEF \perp$ $\perp (AEF)$. (9)

b) Să remarcăm că planele $(ABC)$ și $(CEF)$ (care conțin dreptele paralele $DB \| EF$ (conform 6)) fiind și concurente, avînd punctul $C$ comun $\Rightarrow$ dreapta lor de intersecție — muchia diedrului — care trece prin punctul $C$, va fi paralelă cu dreptele $DB$ și $EF$ (căci, presupunînd contrariul ar rezulta că planele $(ABC)$, $(CEF)$ și planul determinat de paralele $DB$ și $EF$ ar avea un punct comun și deci $DB \| EF$ (absurd). Folosind această remarcă, unghiul plan corespunzător diedrului format de $(ABC)$ și $(CEF)$ îl construim ducînd prin punctul $C$ (și care aparține muchiei diedrului) un plan perpendicular pe dreptele $EF$ și respectiv $DB$ (care sînt paralele cu muchia diedrului). Acesta este tocmai planul $MAC$, deoarece — de exemplu $BD \perp AC$ (ipoteza $ABCD$ pătrat) și $BD \perp AM$ (ipoteza $MA \perp (ABCD)$). Dreptele de intersecție dintre planul $(MAC)$ pe planele $(CEF)$ și $(ABCD)$) sînt și laturile unghiului plan corespunzător pe planele $(CEF)$ și $(ABCD)$ sînt și laturile unghiului plan corespunzător diedrului în cauză $\Rightarrow$ unghiul $PCA$ este unghiul plan căutat.

Deoarece în triunghiul dreptunghic $ARC$ (conform 9) $RO = \frac{AC}{2}$ iar în triunghiul dreptunghic $MAO$, (ipoteză) $AR$ este mediana relativă ipotenuzei $MO$, deducem $AR = \frac{MO}{2} = \frac{AC}{2}$ și deci triunghiul $ARO$ este echilateral $\Rightarrow$ în $\triangle$ dreptunghic $ARC$, $m(\widehat{RCA}) = 30°$, adică măsura unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $(CEF)$ și $(ABC)$ este de $30°$.

c) În $\triangle MAC$, dreapta $CP$ trece prin mijlocul $R$ al medianei $MO$ (demonstrat). (Vezi fig. VIII.G.37.b.)

Ducem prin $O$, $OS \| RP$ $(S \in MA)$ $\Rightarrow$ $PR$ linie mijlocie (prin reciprocă) în $\triangle MSO$ $\Rightarrow$ $MP \equiv SA$. Rezultă concluzia problemei :

$PA = 2 \cdot PM.$

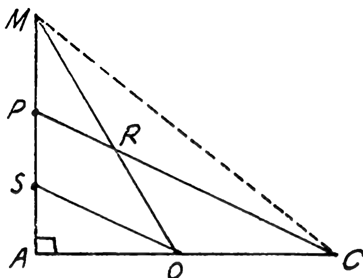



*Fig. VIII.G.37.b.*

*Altă soluție.* Se aplică teorema lui Menelos în $\triangle MAO$, transversala fiind dreapta $CP$ :

$$\frac{CO}{CA} \cdot \frac{PA}{PM} \cdot \frac{RM}{RO} = 1.$$

Cum $CA = 200$ (ipoteză) și $MR \equiv RO$ (conform 7) $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{PA}{PM} \cdot \frac{1}{1} =$

$= 1 \Rightarrow PA = 2 \cdot PM.$

**VIII.G.38.** Se verifică prin reciproca teoremei lui Pitagora că $\triangle ABC$ nu este dreptunghic. Dacă, de exemplu, $\triangle ABC$ era dreptunghic în $B$, atunci unghiul $\widehat{ABC}$ fiind drept și avînd $BC \subset P$ (o putem considera paralelă cu $P$) se proiectează pe planul $P$ tot după un unghi drept. (Teorema : un unghi drept se proiectează pe un plan tot după un unghi drept dacă cel puțin una din laturile lui este paralelă cu planul de proiecție). Nu putem trage însă concluzia că $\triangle A'BC$ nu are în $B$ sau în $C$ unghiul cu măsura de 90°. (Vezi fig. VIII.G.38.)

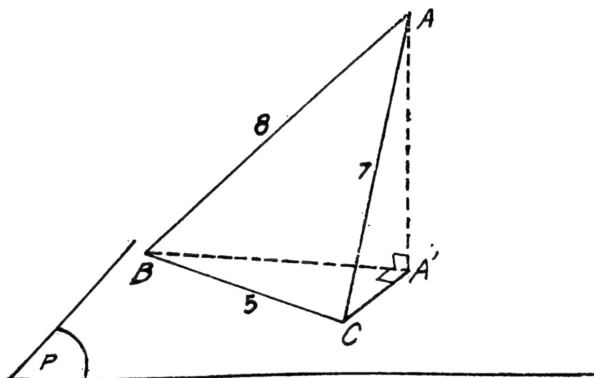



*Fig. VIII.G.38.*

Stabilim în care dintre vîrfurile $A'$, $B$ sau $C$ poate fi unghiul drept, calculînd pătratele lungimilor laturilor $\triangle A'BC$. Astfel : în triunghiul dreptunghic $AA'B$ (ipoteză) $A'B^2 = 64 - x^2$ (unde $x = AA'$). În triunghiul dreptunghic $AA'C$ (ipoteză) $A'C^2 = 49 - x^2$. Verificăm care este valoarea de adevăr a concluziei teoremei lui Pitagora în următoarele cazuri

a) $BC^2 + BA'^2 = CA'^2$ ; $25 + 64 - x^2 = 49 - x^2$, fals deci, unghiul drept *nu este* în $B$.

b) $BC^2 + CA'^2 = BA'^2$ ; $25 + 49 - x^2 = 64 - x^2$, fals deci, unghiul drept *nu este* în $C$.

c) $BA'^2 + CA'^2 = BC'^2$ ; $113 - 2x^2 = 25 \Leftrightarrow 2x^2 = 88 \Leftrightarrow x = = 44 \Rightarrow x = 2\sqrt{11}$, unghiul drept este în $A'$ iar $AA' = 2\sqrt{11} \Rightarrow BA'^2 = = 64 - 44 = 20$ ; $BA' = 2\sqrt{5}$ cm și $CA'^2 = 49 - 44 = 5$ cm, $CA' = 5$ cm.

Aria $\triangle A'BC = \dfrac{A'B \cdot A'C}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{2} = 5$ cm.

**VIII.G.39.** Notăm $\alpha$ planul de proiecție și deci punctul $D$ este proiecția pe planul $\alpha$ a punctului $A$ (ipoteză). (Vezi fig. VIII.G.39.)

Dacă $AB \equiv AC$ ar rezulta că triunghiurile dreptunghice $ADB$ și $ADC$ sînt congruente (cazul C.C.) $\Rightarrow DB \equiv DC$, congruența care contrazice ipotezele $DC = 5$ cm *și* $DB = 13$ cm. Așadar, $AB \not\equiv AC$. Presupunem $AB \equiv BC$.

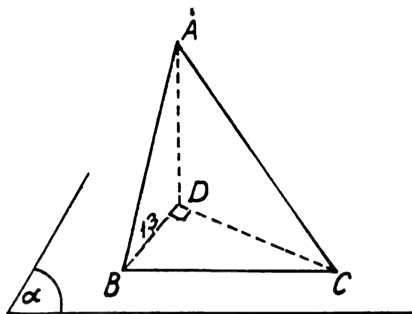



*Fig. VIII.G.39.*

În triunghiul dreptunghic $BDC$ (ipoteză) $BC^2 = 169 + 25 = 149$ cm $\Rightarrow AB = \sqrt{194}$ cm. În $\triangle ADB$ $(m(\widehat{ADB}) = 90°)$, $AD = \sqrt{194 - 169} = = \sqrt{25} = 5$ cm. În $\triangle ADC$ $(m(\widehat{ADC}) = 90°)$ $AC = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$ cm. Așadar, dacă $AB \equiv BC$, laturile $\triangle ABC$ sînt $AB = BC = \sqrt{194}$ cm și $AC = = 5$ cm.

Presupunem $AC \equiv BC$, deci $AC = BC = \sqrt{194}$ (demonstrat). În $\triangle ADC$ $(m(\widehat{ADC}) = 90°)$, $AD = \sqrt{194 - 25} = \sqrt{196} = 13$ cm. În $\triangle ADB$ $(m(\widehat{ADB}) = 90°)$, $AB = \sqrt{2 \cdot 169} = 13 \cdot \sqrt{2}$ cm.

Aşadar, dacă $AC \equiv CB$ laturile triunghiului $ABC$ sînt $AC = BC = \sqrt{194}$ cm şi $AB = 13\sqrt{2}$ cm.

Observaţie. În ambele cazuri triunghiul isoscel $ABC$ se poate construi (suma laturilor congruente fiind mai mare decît latura necongruentă). Problema are două soluţii.

**VIII.G.40.** a) Verificăm dacă este adevărată relaţia din concluzia teoremei directe a lui Pitagora $AM^2 = 4a^2$ ; $MB^2 = 12a^2$ ; $AB^2 = 16a^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow AB^2 = AM^2 + MB^2 \Rightarrow m(\widehat{AMB}) = 90°$ (conform reciprocei teoremei lui Pitagora) $\Rightarrow$ Aria $\triangle AMB = \frac{AM \cdot MB}{2} = \frac{2a \cdot 2a\sqrt{3}}{2} = 2a^2\sqrt{3}$.

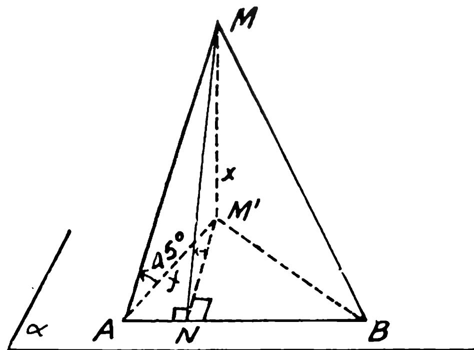



*Fig. VIII.G.40.*

Construim $MN \perp AB$ ($N \in AB$), ducînd $MM' \perp \alpha$ şi apoi $M'N \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare). (Vezi fig. VIII.G.40.)

Triunghiul $MM'A$ este isoscel şi dreptunghic (ipoteză) $MM' \perp AM'$ şi $MM' \equiv AM'$ Notăm $MM' = x$. În $\triangle MM'A$ (conform Pitagora) avem : $2x^2 = 4a^4 \Leftrightarrow x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = a\sqrt{2}$ şi deci $MM' = a\sqrt{2}$. (Vezi fig. VIII.G.40.)

În triunghiul dreptunghic $AMB$ (demonstrat) calculăm lungimea înălţimii $MN$, relativa ipotenuzei $AB$ :

$$MN = \frac{AM \cdot MB}{AB} ; \; MN = \frac{2a \cdot 2a\sqrt{3}}{4a} = a\sqrt{3}$$

În triunghiul dreptunghic $MM'N$ (ipoteză) calculăm lungimea catetei $M'N$ : $M'N = \sqrt{MN^2 - MM'^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.

Se poate calcula aria $\triangle AM'B$.

$$\text{Aria } \triangle AM'B = \frac{AB \cdot M'N}{2} = \frac{4a \cdot a}{2} = 2a^2$$

b) Unghiul plan corespunzător diedrului determinat de planele $\alpha$ și $(AMB)$ este unghiul $MNM'$ deoarece planul $MNM'$ este perpendicular pe muchia $AB$ a diedrului dat (demonstrat). Calculăm o funcție trigonometrică a unghiului $MNM'$. În triunghiul dreptunghic $MM'N$ notăm $m(\widehat{MNM'}) = \varphi$.

$$\cos(\varphi) = \frac{NM'}{NM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Deoarece $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 60° = \frac{1}{2}$; constatăm că $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ deoarece $\frac{1}{4} < \frac{3}{9} < \frac{1}{2}$ $\Longleftrightarrow$ măsura unghiului $MN'M$ este cuprinsă între $45°$ și $60°$.

**VIII.G.41.**

a) În triunghiul dreptunghic $AC'C$ ($CC \perp AC'$ ipoteză) $OO'$ este linie mijlocie ($O$ și $O'$ fiind intersecțiile diagonalelor rombului și pătratului) $\Rightarrow OO' \| CC' \Rightarrow OO' \perp \alpha \Rightarrow$ punctul $O$ se proiectează în $O'$. Deoarece rombul $ABCD$ se proiectează pe $\alpha$ după un pătrat, înseamnă că proiecțiile diagonalelor rombului pe planul $\alpha$ sînt chiar diagonalele pătratului. Știind că atît diagonalele rombului cît și diagonalele pătratului sînt drepte perpendiculare, înseamnă că, de exemplu, unghiul drept $AOB$ din spațiu se proiectează pe planul $\alpha$ tot după un unghi drept și anume, $\widehat{AO'B'}$ (Vezi fig. VIII.G.41.) $\Rightarrow OB \| O'B' \Rightarrow$ (reciprocă : dacă un unghi drept din spațiu se proiectează pe un plan și dacă unghiul de proiecție este unghi drept, atunci cel puțin o latură a unghiului din spațiu este paralelă cu planul de proiecție) $\Rightarrow BD \| B'D'$. Muchia diedrului determinat de romb și pătrat va trece prin punctul $A$ (ipoteză), și va fi paralelă cu diagonalele $DB$ și $D'B'$. (Teorema două drepte paralele situate în două plane care se intersectează, sînt paralele cu dreapta de intersecție a celor două plane.) Unghiul plan al diedrului în cauză va

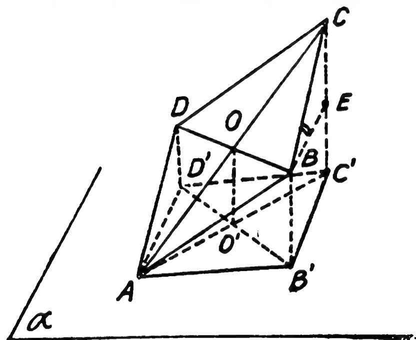



*Fig. VIII.G.41.*

fi determinat ducînd un plan perpendicular pe muchia diedrului (sau, de exemplu, pe diagonala $BD$). Acest plan este planul $CAC'$, iar unghiul plan corespunzător este $\widehat{CAC'}$.

Cum $OO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (ipoteză) şi $AO' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (ca jumătate din diagonala pătratului $AB'C'D'$ de latura a) $\Rightarrow$ $AO = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. În triunghiul dreptunghic $OO'A$ (demonstrat) ipotenuza $AO$ este de două ori mai mare decît cateta $AO'$ $\Rightarrow$ $m(\widehat{OAO'}) = 30° = m(\widehat{CAC'})$ (reciproca teoremei unghiului de 30° dintr-un triunghi dreptunghic).

b) Deoarece $AO = a\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $AC = 2a\sqrt{2}$ ; $DB \| D'B'$ (demonstrat) $\Rightarrow$ $DB \equiv D'B'$ şi deci $DB = a\sqrt{2}$. În aceste condiţii :

$$\text{Aria } ABCD = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{2a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{2} = 2a^2.$$

c) Deoarece triunghiurile dreptunghice $BAB'$ şi $DAD'$ sînt congruente (C.C.) calculăm o funcţie trigonometrică a unghiului $BAB'$ $\Rightarrow$

$$\text{tg}(\widehat{BAB'}) = \text{tg }(\widehat{DAD'}) = \frac{BB'}{AB'} = \frac{OO'}{AB'} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Deoarece trapezele dreptunghice $BB'CC'$ şi $DD'CC'$ au toate laturile congruente (laturile neparalele sînt laturi ale rombului şi, respectiv, ale pătratului, iar laturile paralele $BB' \| CC'$ şi $DD' \| CC'$ sînt congruente — demonstrat), vor avea şi unghiurile congruente (se poate demonstra folosind congruenţa de triunghiuri). Unghiul dintre $BC$ şi $\alpha$ este egal cu unghiul format de $BC$ şi proiecţia ei pe $\alpha$ adică este unghiul dintre $BC$ şi $B'C'$ sau dintre $BC$ şi o paralelă dusă prin $B$ la $B'C'$. Pentru aceasta ducem $BE \| B'C'$ ($E \in CC'$) $\Rightarrow$ $\Delta\, BEC$ dreptunghic în $E$ şi $BE \equiv B'C'$ ($BB'C'E$ dreptunghi din construcţie) $\Rightarrow$ $m(\widehat{CBE}) = m(\widehat{BC, \alpha}) = m(\widehat{DC, \alpha})$ $\Rightarrow$ $\cos(\widehat{BC, \alpha}) = \cos(\widehat{DC, \alpha}) = \cos(\widehat{CBE}) = \frac{BE}{BC} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

**VIII.G.42.** a) Notăm $AM = x$. În triunghiul dreptunghic $MAC$ ($MA \perp \alpha$ — ipoteză) $MC = 2x$ (1) (teorema unghiului de 30° dintr-un triunghi dreptunghic). (Vezi fig. VIII.G.42.) În triunghiul dreptunghic $MAB$ (aceeaşi ipoteză) $AB = x$ (2) (deoarece $MAB$ este şi isoscel $AM \equiv AB$, ipoteze echivalente).

În $\Delta$ dreptunghic $BMC$ (ipoteza $BM \perp MC$), $BC^2 = BM^2 + CM^2$ ; $36 = 2x^2 + 4x^2 = 6x^2$ $\Rightarrow$ $MB = x\sqrt{2}$ (Pitagora) $\Leftrightarrow$ $x = \sqrt{6} = AM$ $MC = 2\sqrt{6}$ ; $MB = 2\sqrt{3}$.

Ducem $AN \perp BC$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $MN \perp BC$ (căci $MA \perp \alpha$ — ipoteză). Calculăm lungimile $MN$ şi $NA$ din două motive ; primul : $AN$ este înălţime în $ABC$ şi deci putem, în con-

tinuare, să calculăm aria $\triangle ABC$ ($\triangle ABC$ este proiecţia ortogonală a $\triangle BMC$ pe plan $\alpha$), al doilea laturile unghiului $MNA$ sînt laturile unghiului plan corespunzător diedrului format de planele $BMC$ şi $BAC$.

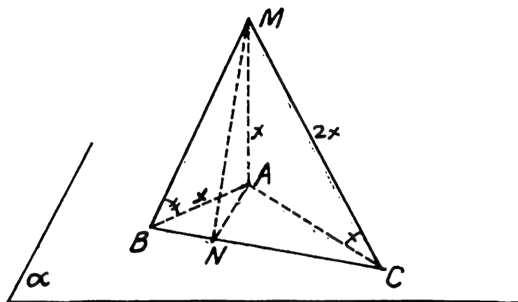



*Fig. VIII.G.42.*

În $\triangle$ dreptunghic $MAN$ (ipoteză) $AN^2 = MN^2 - MA^2 \Rightarrow AN^2 =$ (demonstrat) $\Rightarrow MN = \dfrac{MB \cdot MC}{BC} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{4 \cdot 3\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}$.

În $\triangle$ dreptunghic $MAN$ (ipoteză) $AN^2 = MN^2 - MA^2 \Leftrightarrow AN^2 =$ $= 2 \cdot 4 - 6 = 2 \Rightarrow AN = \sqrt{2}$. Aria $\triangle BAN = \dfrac{BC \cdot AN}{2} = \dfrac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

b) În $\triangle$ dreptunghic $MAN$ (ipoteză)

$$\operatorname{tg}(\widehat{MNA}) = \frac{MA}{AN} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow m(\widehat{MNA}) = 60°.$$

**VIII.G.43.** a) Deoarece $EC \perp (ABC)$ (ipoteză) $\Rightarrow EC \perp BA$ (1). Dar, $BA \perp AC$ (ipoteză) (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow BA \perp (ACE)$ (3).

Analog $CA \perp (ABD)$ (4).

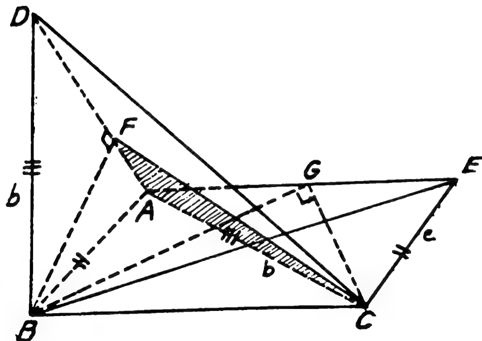



*Fig. VIII.G.43.*

Deoarece $CA \perp (ABD)$ (conform (4)) $\Rightarrow CA \perp BF$ (5). Dar, $BF \perp AD$ (ipoteză) (6). Din (5) și (6) $\Rightarrow BF \perp (ADC)$ (7).

Analog se arată că $CG \perp (ABE)$ (8). (Vezi fig. VIII.G.43.)

b) Observăm că proiecția punctului $B$ pe planul $ADC$ este punctul $F$ (conform (7)) $\Rightarrow$ proiecția $\triangle BAC$ pe planul $ADC$ este triunghiul $FAC$ care este și dreptunghic în $A$ (conform (4)). $\Rightarrow$ Aria $\triangle FAC = \frac{AF \cdot AC}{2}$ (9). Absolut asemănător judecăm despre proiecția $\triangle ABC$ pe planul $ABE$. (Vîrful $C$ se proiectează pe $ABE$ în punctul $G$ etc.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ Proiecția $\triangle CAB$ pe planul $ABE$ este triunghiul $GAB$. Și acest triunghi este dreptunghic tot în $A$ (demonstrație asemănătoare cu precedenta) $\Rightarrow$ Aria $\triangle GAB = \frac{GA \cdot AB}{2}$ (10).

Formăm raportul cerut de concluzia problemei

$$\frac{\text{Aria } \triangle FAC}{\text{Aria } \triangle GAB} = \frac{AF \cdot AC}{GA \cdot AB}. \tag{11}$$

Notăm $AC = b$ și $AB = c$. (12)

Calculăm $AC$ și $AB$ folosind relațiile metrice în triunghiurile dreptunghice $ACE$ și $ABD$ (ipotezele problemei și notația 12)

$$AC^2 = AG \cdot AE = AG \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \quad \text{(conform 12)}$$

$$AB^2 = AF \cdot AD = AF \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \quad \text{(conform 12)}$$

Înlocuind aceste rezultate în (11) obținem

$$\frac{\text{Aria } \triangle FAC}{\text{Aria } \triangle GAB} = \frac{\frac{AB^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot AC}{\frac{AC^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \cdot AB} = \frac{AB}{AC}. \tag{13}$$

Ori relația (13) evidențiază concluzia de la punctul b).

**VIII.G.44.** a) Precizăm că planul $MAC$ este perpendicular pe planul $ABCD$, deoarece conține dreapta $MA = (d_1) \perp (ABCD)$ (Vezi fig. VIII.G.44.) (ipoteză) (1) $\Rightarrow BD \perp MA$ (conform (1)) și $BD \perp AC$ (ipoteza $ABCD$ pătrat) (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow BD \perp (ACMN)$ (3). Cum $BD \subset (NMD) \Rightarrow$ $\Rightarrow$ oricare ar fi planul care conține dreapta $BD$ va fi un plan perpendicular pe planul $MACN$. $\Rightarrow (NBD) \perp (MACN)$.

Analog, se demonstrează că $(MBD) \perp (MACN)$.

b) În planul triunghiului $NCO$ construim $CQ \perp NO$ (1) și cum $BD \perp CQ$ (conform $3a$) $\Rightarrow CQ \perp (BDN)$ (2). Să reținem că punctul $Q$ se află pe înălțimea $NO$ a $\triangle BDN$ (conform $1b$). Demonstrăm că dreapta $BQ$ este înălțime în $\triangle BDN$. Deoarece $BC \perp (NCD)$ (ipoteză) $\Rightarrow ND \perp$ $\perp BC$ (3). Deoarece $CQ \perp (NBD)$ (conform $2b$) $\Rightarrow CQ \perp ND$ (4). Din ($3b$)

și (4b) $\Rightarrow$ $ND \perp (BQC)$ $\Rightarrow$ $BQ \perp ND$, adică dreapta $BQ$ este — în $\triangle NBD$ — înălțimea relativă laturii $ND$. În concluzie, punctul $Q$ aflîndu-se în planul $NBD$ atît pe înălțimea relativă laturii $BD$ cît și pe înălțimea relativă laturii $DC$, el se identifică cu ortocentrul acestui triunghi.

Analog, se demonstrează că punctul $P$, proiecția punctului $A$ pe planul $MBD$, este ortocentrul triunghiului $MBD$.

c) Notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Notăm $AC = 2a \Rightarrow BO = a$ (1). Ducem în planul $(MNAC)$ $NT \perp AM$ $(T \in AM)$ (2). Notăm $AM = x$ și $CN = y$ (3). (Vezi fig. VIII.G.44.)

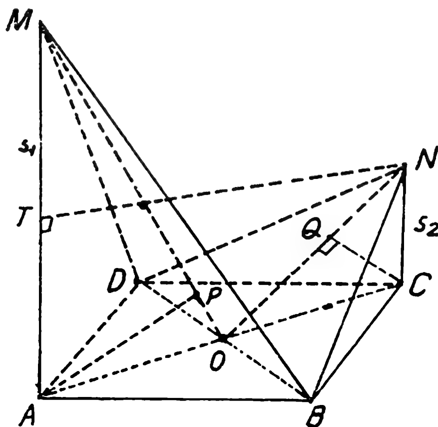



*Fig. VIII.G.44.*

Evaluăm $ON$ în $\triangle$ dreptunghic $NCO$ (ipoteză).

$ON^2 = a^2 + y^2$ (conform 1c și 3c). (4)

Evaluăm $OM$ în $\triangle$ dreptunghic $MAO$ (ipoteză).

$OM^2 = a^2 + x^2$ (conform 1c și 3c). (5)

Deoarece $MO \perp ON$ (ipoteză), urmează că

$MN^2 = ON^2 + OM^2 = 2a^2 + x^2 + y^2$ (conform 4c și 5c). (6)

În triunghiul dreptunghic $NTM$ (conform 2c) $\Rightarrow$ $MN^2 = NT^2 + TM^2$. Cum $NT \equiv AC$ ($TACN$ dreptunghi — construcție) și $TM = (x - y)$ $\Rightarrow$ $MN = 4a^2 + (x - y)^2$ (7). Din (6c) și (7c) $\Rightarrow$ $2a^2 + x^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 + y^2 - 2xy$ $\Leftrightarrow$ $a^2 = x \cdot y$ (8). Cum $a = BO$ (conform 1c) și $x = AM$ și $y = CN$ (conform 3c) $\Rightarrow$ $BO^2 = AM \cdot CN$, relație care exprimă că segmentul $BO$ este media geometrică a segmentelor $AM$ și $CN$.

**VIII.G.45.** Deoarece punctul $E$ este centrul pătratului $BB'CC'$ (Vezi fig. VIII.G.45a) (ipoteză), el este punctul de intersecţie a diagonalelor $CB'$ şi $BC'$. Poligonul de secţiune dintre $CEM$ şi feţele cubului este triunghiul $MB'C$, deoarece $CE$ este inclusă în diagonala $CB'$, deci planul $BB'CC'$ este intersectat de planul $MEC$ după dreapta $CB'$ Planul $AA'BB'$ este intersectat de planul $MEC$ după dreapta $MB'$ (deoarece $M$ şi $B'$ sînt puncte din planul $AA'BB'$ şi $MEC$). Planul $ABCD$ este intersectat de planul $MEC$ după dreapta $MC$ ($M$ şi $C$ aparţin planului $ABCD$ şi planului $MEC$).

Ducem un plan „ajutător" şi anume un plan care să conţină dreapta $D'E$ şi să fie perpendicular pe planul orizontal $ABCD$ (în general „planele ajutătoare" sînt plane perpendiculare pe planul orizontal, şi care conţin drepte anunţate în ipoteza problemei). (Vezi fig. VIII.G.45a.) Acesta este planul $DD'E$ (este perpendicular pe $ABCD$, deoarece $DD' \perp ABCD$ — ipoteză, şi conţine dreapta $D'E$ dată în ipoteza problemei). Acesta intersectează „feţele" cubului după dreptele $DF \subset ABCD$; $FE \subset BB'CC'$ ($FE \parallel DD'$), iar planul $A'B'C'D'$ după o dreaptă care conţine $D'$ şi mijlocul segmentului $B'C'$. Notăm acest punct $G$, deci $D'G \subset A'B'C'D'$. Cum $FE \parallel DD'$ şi $B'G \equiv GC' \Rightarrow$ dreapta de intersecţie $FE$ este identică cu dreapta $FG \Rightarrow$ Poligonul de secţiune dintre planul auxiliar şi feţele cubului este dreptunghiul $D'DFG$.

În pătratul $ABCD$ notăm $DF \cap MC = \{P\}$. (Vezi fig. VIII.G.45b.) Cum triunghiurile dreptunghice $DCF$ şi $CBM$ sînt congruente (cc) $\Rightarrow$ $\Rightarrow (\widehat{MCB}) \equiv (\widehat{FDC})$. (1)

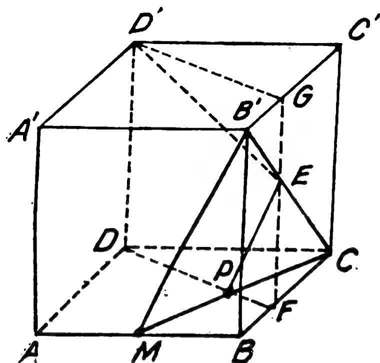


*Fig. VIII.G.45.a.*

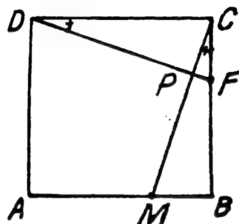


*Fig. VIII.G.45.b.*

În $\triangle CPF$ : $m(\widehat{PCF}) + m(\widehat{PFC}) = 90°$ (2) (conform (1) şi deoarece în $\triangle$ dreptunghic $DCF$ : $m(\widehat{FDC}) + m(\widehat{PCF}) = 90°$. $\Rightarrow m(\widehat{CPF}) = 180° - 90° = 90° \Rightarrow$ dreptele $MC$ şi $FD$ sînt perpendiculare (3). Deoarece $MC \perp GF$ (construcţia dreptei $GF \perp (ABCD)$) $\Rightarrow MC \perp (GF, DF) \Rightarrow$ $\Rightarrow MC \perp (DD'FG) \Rightarrow MC \perp D'E$ (4).

Deoarece $D'C' \perp BB'CC'$ (ipoteză) și $C'E \perp CB'$ (diagonale în pătrat) $\Rightarrow$ $D'E \perp CB'$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) (5). Din (4) și (5) $\Rightarrow$ $D'E \perp (MC, CB')$ $\Rightarrow$ $D'E \perp (MEC)$.

**VIII.G.46.** Din definiția prismei triunghiulare regulate drepte, rezultă că fețele $AA'BB'$, $BB'CC'$ și $CC'AA'$ sînt dreptunghiuri congruente. (Vezi fig. VIII.G.46.)

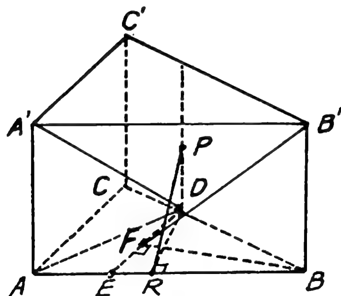


*Fig. VIII.G.46.*

a) Deoarece $AA' \perp (ABC)$ (definiție), ducem $AD \perp BC$ $\Rightarrow$ $A'D \perp$ $\perp BC$ (conform teoremei celor trei perpendiculare), și $A'D$ este distanța căutată. Lungimea ei o calculăm în $\triangle$ dreptunghic $AA'D$ (definiția prismei). $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (înălțimea triunghiului echilateral $ABC$ de latura $a$).

Cum $AA' = a$ (ipoteză) $\Rightarrow$ $A'D = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

b) Deoarece $CD \equiv DB$ (înălțimea $AD$ — în $\triangle ABC$ echilateral este și mediană), ducem $DE \parallel AC$, $(E \in AB)$ și obținem linia mijlocie descrisă de ipoteza (reciproca teoremei liniei mijlocii).

Cum $BB' \perp (ABC)$ (definiția prismei), ducem $BF \perp ED$, $(F \in$ $\in ED)$ $\Rightarrow$ $B'F \perp DE$ (Vezi fig. VIII.G.46.) (conform teoremei celor trei perpendiculare).

$B'F$ este distanța de la $B'$ la latura $DE$. Triunghiul $BDE$ este asemenea cu $ABC$, $(DE \parallel CA)$, raportul de asemănare este $\frac{DE}{CA} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\triangle BED$ este echilateral și are lungimile laturilor și lungimile înălțimilor jumătate din lungimile laturilor și înălțimilor $\triangle ABC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $BF = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Calculăm — în $\triangle$ dreptunghic $B'BF$ (definiția prismei) distanța $B'F$.

$$B'F = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{19}}{4}.$$

c) Deoarece punctul $P$ — centrul dreptunghiului $BB'CC'$ — este punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului $BB'CC'$ (Vezi fig. VIII.G.46.), proiecția lui pe planul $ABC$ este punctul $D$, mijlocul laturii $BC$. Deci $PD \perp ABC$. Din punctul $D$ construim $DR \perp BE$ $(R \in BE) \Rightarrow$ $\Rightarrow PR \perp AB$ (conform teoremei celor trei perpendiculare) și $PR$ este distanța de la $P$ la latura $AB$. În triunghiul dreptunghic $PDR$ (construcție) calculăm lungimea $PR^2 = PD^2 + DR^2$. Cum $PD = \frac{BB'}{2}$ și $DR \equiv BF$ (înălțimi congruente în $\triangle$ echilateral $ABC$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow PR = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$$

*Observație.* La acest rezultat puteam ajunge fără să mai facem calculul de mai sus, dar observînd că triunghiurile dreptunghice $AA'D$ și $PDR$ sînt asemenea : $\left(\frac{AA'}{PD} = \frac{AD}{DR} = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow PR = \frac{A'D}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

**VIII.G.47.** Mai întîi să arătăm că există un triedru ale cărui laturi, formează două cîte două unghiuri de 60°, (Vezi fig. VIII.G.47.) (sau că există un astfel de paralelipiped).

Presupunem că $m(\widehat{A'AD}) = m(\widehat{DAB}) = 60°$ și demonstrăm că $m(\widehat{A'AB})$ este tot de 60°. Construim în planul $AA'DD'$, $A'N \perp AD$ $(N \in$ $\in AD$ deoarece $m(\widehat{A'AD} = 60°)$. Construim în planul $A'ABB'$, $A'M \perp AB$. Deoarece $A'N$ și $A'M$ sînt distanțele dintre laturile paralele ale rombului, ele sînt congruente $A'N \equiv A'M \Rightarrow$ triunghiul dreptunghic $A'NA$ (construcție) este congruent cu triunghiul dreptunghic $A'MA$ (construcție) deoarece au catetele $A'N$ și $A'M$ congruente (demonstrat) și ipotenuza $AA'$ latura comună $\Rightarrow m(\widehat{A'AM}) = 60°$ În concluzie, în punctul $A$

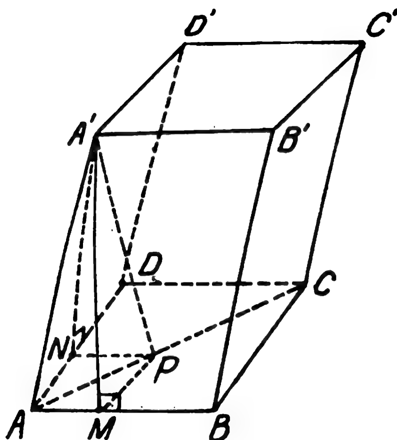



*Fig. VIII.G.47.*

există un triedru astfel încît $m(\widehat{A'AD}) = m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{A'AB}) = 60°$. În continuare, ducem din punctul $A'$ $A'P \perp (ABCD)$. Deoarece $A'N \perp AD$ şi $A'M \perp AB$ (construcţie) $\Rightarrow$ $PN \perp AD$ şi $PM \perp AB$ (conform unei reciproce a teoremei celor trei perpendiculare). Deoarece triunghiurile dreptunghice $A'PN$ şi $A'PM$ sînt congruente ($A'P$ latură comună, $A'N \equiv A'M$ (demonstrat, cazul C.C.) $\Rightarrow$ $PN \equiv PM$ $\Rightarrow$ dreapta $AP$ este bisectoarea unghiului $DAB$ (definiţia bisectoarei ca loc geometric). (Vezi fig. VIII.G.47.)

În concluzie, planul $A'AP$ care este perpendicular pe $ABCD$ (construcţia perpendicularei $A'P$), conţine diagonala $AC$ a rombului $ABCD$. Distanţa dintre planele $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ fiind $A'P$, aceasta este şi înălţimea paralelipipedului dat.

Calculul înălţimii $A'P$

În triunghiul dreptunghic $A'MA$ deoarece $m(\widehat{A'AM}) = 60°$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow m(\widehat{AA'M}) = 30° \Rightarrow AM = \frac{AA'}{2} = \frac{a}{2}$

În triunghiul dreptunghic $PMA$ (construcţie), $m(\widehat{PAM}) = 30°$ (demonstrat) $\Rightarrow MP = \frac{AP}{2} = x$ şi conform teoremei lui Pitagora $AM^2 = AP^2 - PM^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = 4x^2 - x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow$, deci

$$AP = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

În triunghiul dreptunghic $A'PA$ (construcţie), $A'P = \sqrt{AA'^2 - AP^2}$;

$$A'P = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

*Calculul ariei rombului ABCD.* Deoarece diagonalele rombului sînt $a$ şi $2a\sqrt{3}$ (rombul $ABCD$ este format din două triunghiuri echilaterale cu o latură comună, rezultă : Aria $ABCD = \frac{2a^2\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$.

*Calculul volumului paralelipipedului dat.* $V =$ Aria $ABCD \cdot A'P$.

$$V = a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = a^3\sqrt{2}.$$

**VIII.G.48.** Deoarece $AB' \perp (ABCD)$, (ipoteză) planul $AB'C'D$ este perpendicular pe planul $ABCD$ (dacă o dreaptă dată este perpendiculară pe un plan dat, orice plan care conţine dreapta dată este perpendicular pe planul dat). (1) (Vezi fig. VIII.G.48.)

Feţele $AA'DD'$ şi $BB'CC'$ sînt dreptunghiuri deoarece $AD \perp AB$ (ipoteză $ABCD$ este pătrat) şi $AD \perp AB'$ (conform 1) $\Rightarrow$ $AD \perp (AA'BB')$ $\Rightarrow$ $AD \perp AA'$. Analog $BC \perp BB'$. Muchiile prismei fiind paralele (defi-

nația prismei) $\Rightarrow AD \parallel A'D'$ și $AA' \parallel DD'$ și $AD \perp AA' \Rightarrow AA'DD'$ este dreptunghi. Analog $BB'CC'$ (2). (Vezi fig. VIII.G.48.)

Fețele $AA'BB'$ și $CC'DD'$ sînt paralelograme cu înălțimea egală, de exemplu $AB' = 3\sqrt{3}$ cm (calculată în triunghiul dreptunghic $B'AB$ — ipoteză) și baza egală — de exemplu cu $AB = 3$ cm.

În aceste condiții, calculăm volumul și aria totală a prismei.

$V = \text{Aria } ABCD.\ AB' = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$ cm$^3$.

Aria totală $= 2$ Aria $AA'BB' + 2$ Aria $AA'DD' + 2$ Aria $ABCD$.

Aria totală $= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 9 = 18\sqrt{3} + 54 = 18(\sqrt{3} + 3)$ cm$^2$.

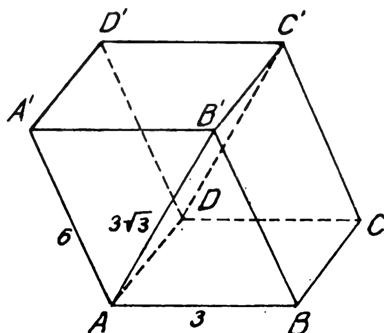



*Fig. VIII.G.48.*

**VIII.G.49.**

a) Deoarece, de exemplu $OE \perp AB \Rightarrow AE \equiv EB$. (Într-un cerc, dreapta care trece prin centrul cercului și este perpendiculară pe o coardă din cerc, este mediatoarea coardei). Analog $BF \equiv FC$, $GC \equiv GD$, $HD \equiv HA$. (Vezi fig. VIII.G.49.a.)

Ducem diagonala $AC$. În $ABC$, $EF$ este linie mijlocie (demonstrat) $\Rightarrow EF \parallel AC$ și $EF = \dfrac{AC}{2}$ (1) în $\triangle ADC$, $HG$ este linie mijlocie (demonstrat) $\Rightarrow HG \parallel AC$ și $HG = \dfrac{AC}{2}$(2).

Din (1) și (2) $\Rightarrow$ patrulaterul $EFGH$ este paralelogram.

b) Aria paralelogramului $EFGH$, cunoscînd aria patrulaterului inscriptibil (convex) $ABCD$, o putem calcula, de exemplu astfel: (Vezi fig VIII.G.49.b.) Diagonala $AC$ împarte patrulaterul în două triunghiuri $ABC$ și $ADC$. Ducem în $ABC$ înălțimea $BM$ ($M \in AC$). Fie $BM = 2x$. Ducem în $\triangle ADC$ înălțimea $DN$ ($N \in AC$). Notăm $DN = 2y$. Aceeași diagonală împarte paralelogramul $EFGH$ în două paralelograme $EFPR$ ($P$ și $R \in AC$) și $GHRP$. Înălțimea paralelogramului $EFPR$ este jumătate din

$BM$ ($EF$ este linie mijlocie în $ABC$), şi deci este egală cu $x$. Analog, înălţimea paralelogramului $GHRP$ este egală cu $y$. Aria $\triangle ABC = \frac{2 \cdot x \cdot AC}{2} = AC \cdot x$. Aria $\triangle ADC = \frac{2y \cdot AC}{2} = AC \cdot y$. Aria patrulaterului $ABCD = AC \cdot (x + y)$. Aria paralelogramului $EFPR = EF \cdot x = \frac{AC}{2} \cdot x$. Aria paralelogramului $GHRP = HG \cdot y = \frac{AC}{2} \cdot y$. Aria paralelogramului $EFGH = \frac{AC}{2} \cdot (x + y)$, adică jumătate din aria patrulaterului $ABCD$.

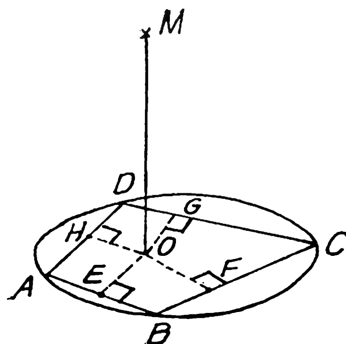



*Fig. VIII.G.49.a.*

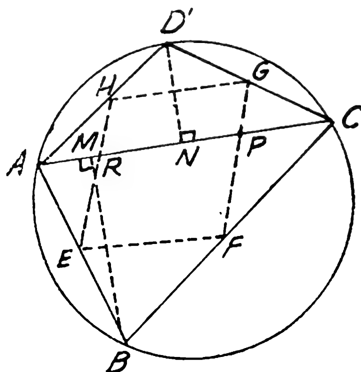



*Fig. VIII.G.49.b.*

Aşadar, aria $EFGH = \frac{a^2}{2}$ Volumul prismei cu baza $EFGH$ şi înălţimea $MO = a$ este $V = \frac{a^2}{2} \cdot a = \frac{a^3}{2}$.

c) *Observaţie.* Dacă $EFGH$ este pătrat, atunci diagonalele patrulaterului $ABCD$ sînt congruente, perpendiculare şi se înjumătăţesc. Scriem că aria $EFGH = \frac{a^2}{2}$, este aria pătratului $EFGH$, adică $\frac{a^2}{2} = l^2$ ($l$ fiind latura pătratului $EFGH$) $\Rightarrow l = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Aria totală a prismei în cauză va fi $At = Al + 2A$ bazei $= \frac{4a\sqrt{2}}{2} \cdot a + 2 \cdot \frac{2a^2}{4} = a^2(2\sqrt{2} + 1)$.

**VIII.G.50.** Din ipotezele problemei rezultă că punctele $A$, $B$, $C$, $D$ sînt vîrfurile unui tetraedru regulat $ABCD$. (Vezi fig. VIII.G.50.)

a) Deoarece fețele tetraedrului sînt triunghiuri echilaterale, înălțimile fețelor sînt și mediatoarele laturilor. În aceste condiții, de exemplu înălțimile $BO_1$ și $AO_2$ sînt concurente într-un punct care este mijlocul segmentului $CD$. Fie $E$ acest punct.

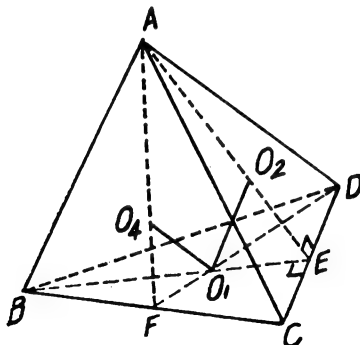



*Fig. VIII.G.50.*

Triunghiul $AEB$ este isoscel deoarece în triunghiurile echilaterale și congruente $ACD$ și $BCD$ înălțimile $AE$ și respectiv $BE$ sînt congruente. deci $EA \equiv EB$. Cum punctele $O_2$ și $O_1$ sînt respectiv centrele de greutate ale triunghiului $ACD$ și $BCD$ (ipoteză) $\Rightarrow \frac{EO_2}{EA} = \frac{EO_1}{EB} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1O_2 \parallel AB$ și triunghiurile $EO_1O_2$ și $EBA$ sînt asemenea, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{3} \Rightarrow O_1O_2 = \frac{AB}{3}$ Notînd, de exemplu $AB = a$, obținem $O_1O_2 = \frac{a}{3}$

Analog, gîndim despre distanțele determinate de restul punctelor $O_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Punctele $O_1$, $O_2$, $O_3$, $O_4$ vor fi vîrfurile altui tetraedru regulat $O_1O_2O_3O_4$ a cărui muchie va fi egală cu $\frac{a}{3}$

b) Considerăm, de pildă, punctele $O_1$, $O_2$, $O_4$. (Vezi fig. VIII.G.50.) În $\triangle ABC$ și $\triangle DBC$, înălțimile $AO_4$ și $DO_1$ sînt concurente în mijlocul laturii $BC$ — notăm acest punct $F$. Deoarece $O_1O_2 \parallel AB$ (demonstrat) și $O_1O_4 \parallel AD$ (prin analogie) $\Rightarrow (O_1O_2O_4) \parallel (ABD)$ deoarece cele două plane conțin cîte două drepte concurente și paralele. Schimbînd ordinea indicilor $(i = 1, \ldots, 4)$ punctului $O$ și schimbînd asemănător ordinea alfabetică a punctelor $A$, $B$, $C$, $D$, obținem concluzia : oricare trei din punctele $O_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ determină cîte un plan paralel cu cîte unul din cele patru plane determinate de punctele $A$, $B$, $C$, $D$.

c) Volumul prismei = Aria $\triangle BCD \cdot AO_1$ unde $AO_1$ este distanța de la $A$ la planul $BCD$, deoarece segmentele $AB$, $AC$, $AD$ fiind congruente, punctul $A$ se proiectează pe planul $BCD$ într-un punct egal depărtat de $B$, $C$ și $D$ (teoremă) $\Rightarrow$ piciorul perpendicularei din $A$ pe planul $BCD$ este centrul cercului circumscris $\triangle BCD$, adică punctul $O_1$. Păstrînd notația $AB = a$, obținem Aria $\triangle BCD = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

În triunghiul dreptunghic $AO_1B$

$$BO_1 = \frac{2}{3} BE \Rightarrow BO_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AO_1 = \sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Deci $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{4}$.

**VIII.G.51.** Construim prisma regulată și dreaptă $ABEDCE'$ Notăm $AB = AD = a$. (Vezi fig. VIII.G.51.)

Proiectăm punctul $O$ pe planul $ABE$. Deoarece $(BCEE') \perp (ABE)$ (din construcția precedentă); rezultă că punctul $O$ se proiectează pe $EB = (BCEE') \cap (ABE)$. Fie $O_1$ proiecția punctului $O$ pe acest plan $\Rightarrow EO_1 \equiv O_1B$ deoarece punctul $O$ este mijlocul segmentului $EC$ și $OO_1 \parallel BC$. Cum $AF \equiv FB$ (ipoteză) $\Rightarrow$ în $\triangle ABE$ $O_1F$ linie mijlocie și deci $O_1F = \frac{a}{2}$ (ipoteza $\triangle ABE$ echilateral). În triunghiul dreptunghic $OO_1F$ (construcție), $OF = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Deoarece $EC$ este diagonala pătratului $BCE'E$ (construcție) $\Rightarrow OC = OE = OB = OF = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Pentru a construi punctul $N$ folosim teorema celor trei perpendiculare, astfel $EF \perp (ABCD)$, *apoi* $FN \perp CN \Rightarrow EN \perp CM$, deci punctul $N$ este proiecția

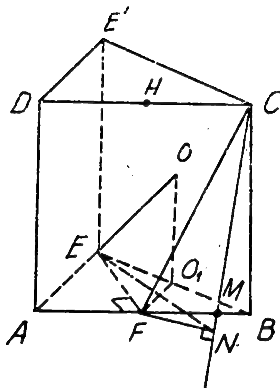


*Fig. VIII.G.51.*

punctului $E$ pe dreapta $CM$. $\Rightarrow$. Triunghiul $ENC$ este dreptunghic în $N$. În acest triunghi, ipotenuza $EC$ are lungime constantă, $\Rightarrow$ mediana $NO$ are lungime constantă și anume $NO = \frac{EC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Așadar, $OC = ON = = OF = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Cum $DH \equiv HC$ (ipoteză), lungimea $OH$ se calculează asemănător cu lungimea $OF$, proiectînd punctul $O$ pe planul $DCE'$... etc. Așadar, șirul de egalități se poate completa astfel : $OC = ON = OF = OB = = OH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Să observăm că $\triangle FNC$, dreptunghic în $N$ (construcție) are ipotenuza $FC$ de lungime constantă (punctele $F$ și $C$ sînt fixe), și deci, pentru diferite poziții ale punctului $M$ pe segmentul $AB$, punctul $N$ descrie un cerc de diametru constant $FC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

**VIII.G.52.** a) Folosim metoda planelor auxiliare ce permit construcția distanței $AE$. Ducem prin $BD'$ un plan perpendicular pe planul orizontal $ABCD$. Acest plan va conține $D'D$ (deoarece $D'D \perp (ABCD)$ — ipoteză, plan diagonal). Poligonul de secțiune dintre acest plan și cub este dreptunghiul $DD'BB'$. Notăm intersecția diagonalelor pătratului $ABCD$ cu punctul $O$. Ne gîndim că putem obține construcția perpendicularei $AE$ folosind teorema celor trei perpendiculare. (Vezi fig. VIII.G.52.a.)

Ducem o perpendiculară din $A$ pe planul $DD'BB'$ $\to$ aceasta este $AO$ ($AO \perp BD$ — diagonale în pătrat și $AO \perp DD'$ — ipoteză). Din punctul $O$ ducem $OE \perp BD'$ ($E \in D'B$) $\Rightarrow$ $AE \perp D'B$ conform teoremei celor trei perpendiculare). În dreptunghiul $DD'BB'$ în care $OE \perp BD'$, calculăm lungimea segmentului $OE$. (Vezi fig. VIII.G.52.b.)

$\triangle OEB \sim \triangle D'DB$ ($OE \perp BD'$, și $B$ unghi comun) $\Rightarrow \frac{OE}{DD'} = = \frac{OB}{BD'} = \frac{BE}{DB}$ și după înlocuiri $\frac{OE}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} \Rightarrow OE = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

b) Calculăm și lungimea segmentului $BE$ :

$$\frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}} = \frac{BE}{a\sqrt{2}} \Leftrightarrow BE = \frac{2a^2}{2a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow D'E = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

În triunghiul dreptunghic $BB'D'$, calculăm lungimea proiecției catetei $BB'$ pe ipotenuza $BD'$ Notăm $S$ proiecția punctului $B'$ pe $BD'$

$$BS = \frac{BB'^2}{BD'} \text{ (tr. catetei)} = \frac{a^2}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Cum $BE = \frac{a\sqrt{3}}{3} = BS$ şi punctele $E$ şi $S$ aparţin diagonalei $BD' \Rightarrow$
$\Rightarrow E = S \Rightarrow$ punctele $O$, $E$, $B'$ sînt coliniare. Aşadar, planul $AB'C$ intersectează planul $BB'DD'$ după dreapta $OB'$ care este perpendiculară pe diagonala $BD'$ Deoarece $BD' \perp AC$ (demonstrat) $\Rightarrow BD' \perp (AB'C)$.

*Fig. VIII.G.52.a.*

*Fig. VIII.G.52.b.*

c) În triunghiul dreptunghic $B'OA$ (demonstrat) $\cos(\widehat{OAB'}) = \frac{AO}{AB'} = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\widehat{OAB'}) = 60°$.

Altă soluţie Triunghiul $AB'C$ este echilateral, laturile lui fiind diagonalele feţelor cubului $\Rightarrow m(\widehat{B'AC}) = 60°$.

**VIII.G.53.**

În figura VIII.G.53, notăm Aria $\triangle ABC = a^2$. Trebuie să evaluăm aria triunghiului $GB'C'$. Construim triunghiul medial $A'B'C'$ Deoarece $CB'C'A'$ este paralelogram (liniile mijlocii sînt paralele cu laturile triunghiului dat), diagonalele $B'A'$ îl împarte în două triunghiuri con-

gruente (L.L.L.) $\Rightarrow$ Aria $\triangle B'CA'$ = Aria $\triangle B'C'A'$. Tot aşa se demonstrează că Aria $\triangle B'C'A$ = Aria $\triangle A'B'C'$ = Aria $\triangle BC'A'$ $\Rightarrow$ Aria $\triangle A'B'C' = \frac{1}{4}$ Aria $\triangle ABC = \frac{a^2}{4}$ (1). Acelaşi rezultat îl putem obţine folosind faptul că de exemplu — $\triangle CB'A' \sim \triangle CAB$ $B'A' \parallel BA$ şi raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$. Raportul ariilor acestor triunghiuri este de $\frac{1}{4}$ (teoremă) etc... (Vezi fig. VIII.G.53.)

În $\triangle A'B'C'$, $G$ este centrul de greutate, deoarece mediana — de exemplu — $AA'$ înjumătăţeşte orice paralelă la $BC$. Notăm $A''$ mijlocul laturii $B'C'$ şi $B''$ mijlocul laturii $C'A'$. Deoarece mediana unui triunghi împarte triunghiul în două triunghiuri echivalente, rezultă că: Aria $\triangle B'GA''$ = Aria $\triangle C'GA''$, pe care le mai putem scrie şi ca diferenţe: Aria $\triangle A'B'A''$ — Aria $\triangle A'B'G$ = Aria $\triangle A'C'A''$ — Aria $A'C'G$, cum Aria $A'B'A''$ = Aria $\triangle A'C'B''$ (conform propoziţiei precedente) $\Rightarrow$ Aria $\triangle A'B'G$ = Aria $\triangle A'C'G$. Asemănător se demonstrează că Aria $\triangle B'GC'$ = Aria $\triangle A'B'G$ $\Rightarrow$ Ariile triunghiurilor $GB'C'$, $GC'A'$, $GA'B'$ sînt egale (2) $\Rightarrow$ Aria $GB'C' = \frac{1}{3}$. Aria $\triangle A'B'C' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ Aria $\triangle ABC = \frac{1}{12} \cdot a^2$ (conform 1).

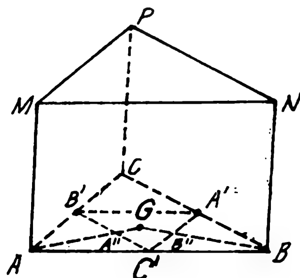


*Fig. VIII.G.53.*

Deoarece înălţimea prismei strunjite este înălţimea prismei nestrunjite, urmează că volumul prismei strunjite este de 12 ori mai mic decît al prismei date.

Notînd volumul prismei strunjite $V_1$ (ipoteză) şi volumul bazei $V$ (ipoteză) urmează că:

$$V_1 = \frac{V}{12} \text{ sau } V = 12 \cdot V_1.$$

**VIII.G.54.** a) Directa : paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este dreptunghic, deci tetraedrul $A'AB'D'$ are muchiile opuse perpendiculare ; problema este clasică — în această ipoteză — de exemplu punctul $A'$ se proiectează în ortocentrul $H_1$ al $\triangle AB'D'$. (Vezi fig. VIII.G.54.)

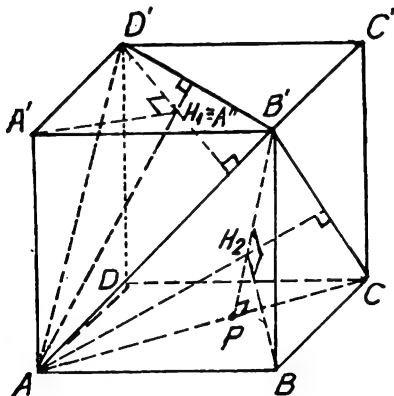



*Fig. VIII.G.54.*

Demonstraţie. Ducem din $A'$ o perpendiculară pe planul $AB'D'$. Notăm proiecţia punctului $A'$ pe planul $AB'D'$ cu $A''$ Deoarece $A'A'' \perp (AB'D') \Rightarrow A'A'' \perp AD'$ Cum $A'B' \perp AD'$ (ipoteză) $\Rightarrow AD' \perp (A'B', A'A'') \Rightarrow AD' \perp (A'B'A'') \Rightarrow AD' \perp B'A''$ şi deci $B'A''$ este înălţimea dusă din $B'$ pe latura $AD'$ $\Rightarrow$ Punctul $A'$ se proiectează pe înălţimea triunghiului $AB'D'$ dusă din $B'$ pe latura $AD'$. Analog se demonstrează că punctul $A'$ se proiectează şi pe înălţimea dusă din punctul $D'$ pe latura $AB'$ $\Rightarrow$ punctul $A''$ fiind pe cele două înălţimi, este chiar ortocentrul $\triangle AB'D'$ — deci $A'' = H_1$. Schimbînd notaţia tetraedrului $A'AB'D'$ în $BAB'C$ şi repetînd judecăţile, deducem că punctul $B$ se proiectează în ortocentrul $H_2$ al triunghiului $AB'C$.

Reciprocă. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped şi $H_1$ şi $H_2$ respectiv ortocentrele triunghiurilor $AB'D'$ şi $AB'C$. Dacă $A'$ şi $B$ se proiectează pe planele $AB'D'$ şi $AB'C$ respectiv în $H_1$ şi $H_2$, atunci paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este dreptunghic.

Demonstraţie :

Se demonstrează reciproca propoziţiei de la punctul a) adică dacă în tetraedrul $A'AB'D'$ vîrful $A'$ se proiectează pe planul $AB'D'$ în ortocentrul $H_1$ al $\triangle AB'D'$, atunci muchiile opuse ale tetraedrului $A'AB'D'$ sînt perpendiculare — deoarece din $A'H_1 \perp AB'D' \Rightarrow A'H_1 \perp B'D'$ (1). Însă $AH_1 \perp B'D'$ (ipoteză) (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow B'D' \perp (A'H_1;\ AH_1) \Rightarrow B'D' \perp AA'$ (3). Analog se demonstrează că $AB' \perp A'D'$ (4) şi $AD' \perp A'B'$ (5). Relaţiile (3), (4) şi (5) evidenţiază concluzia propoziţiei

reciproce. Schimbînd notația tetraedrului $A'AB'D'$ în $BAB'C$ și notația ortocentrului $H_1$ în ortocentrul $H_2$, obținem alte trei relații de perpendicularitate analoage cu (3), (4) și (5). Ele sînt $AC \perp BB'$ (6), $AB' \perp BC$ (7) și $CB' \perp AB$ (8).

Deoarece — de exemplu — $AA' \parallel BB'$ (definiția prismei) $\Rightarrow$ — de exemplu — $BB' \perp B'D'$ (9). Cum $B'D' \parallel BD$ (deoarece $BB'DD'$ este paralelogram — definiția prismei : $BB' \parallel DD'$ și $BB' \equiv DD'$) $\Rightarrow$ $BB' \perp BD$ (10). Din (9) și (6) $\Rightarrow$ $BB' \perp (ABCD)$ (11). Asemănător se arată — de exemplu — că $AB \perp (BB'CC')$ (12). Din (11) și (12) $\Rightarrow$ în vîrful $B$ paralelipipedul are muchiile perpendiculare două cîte două $\Rightarrow$ paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este dreptunghic.

**VIII.G.55.** Să descriem metoda care se întrebuințează în mod obișnuit pentru a determina un punct comun a două plane $\alpha$ și $\beta$, care nu sînt paralele. Se intersectează planele date $\alpha$ și $\beta$ cu un plan auxiliar $\gamma$ de poziție particulară așa încît intersecțiile acestui plan auxiliar $\gamma$, cu planele date $\alpha$ și $\beta$ să fie aproape evidente. Intersecțiile planului auxiliar $\gamma$ cu planele date $\alpha$ și $\beta$ vor fi două drepte $d_1$ și $d_2$ care fiind situate amîndouă în planul auxiliar $\gamma$, în genere se vor intersecta într-un punct — de exemplu $P$, care va reprezenta un punct al intersecției planelor date $\alpha$ și $\beta$. Pentru a obține un alt punct al intersecției planelor date $\alpha$ și $\beta$, vom întrebuința un alt plan auxiliar $\delta$ Procedînd asemănător, obținem un alt punct de intersecție dintre planele $\alpha$, $\beta$ și $\delta$, de exemplu punctul $R$. În acest mod obținem dreapta $PR$ care va fi tocmai dreapta

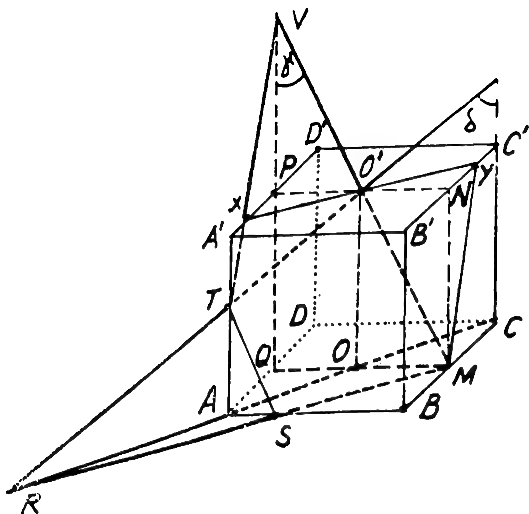



*Fig. VIII.G.55.a.*

de intersecţie dintre planele $\alpha$ şi $\beta$. De obicei, planele auxiliare sînt duse perpendicular pe planul orizontal (deci sînt plane proiectate).

Folosind această metodă, să căutăm de exemplu intersecţia dintre planul $TO'M$ şi planul orizontal $ABCD$. Ducem prin punctele $M$ şi $O'$ primul plan auxiliar $\gamma = MNPQ$, perpendicular pe planul orizontal $ABCD$. El va intersecta feţele $BB'CC'$, $AA'DD'$ după drepte paralele cu $AA'$. Deoarece $MO \parallel AB$, planul, va fi şi paralel cu $AA'BB'$. (Vezi fig. VIII.G.55.a.) (Unde $O$ este proiecţia punctului $O'$ pe $(ABCD)$).

Planul $\gamma$, planul $TOM$ şi planul orizontal $ABCD$ au un punct comun şi anume punctul $M$. Ducem prin punctele $T$ şi $O'$ al doilea plan auxiliar $\delta$, perpendicular pe planul orizontal $ABCD$. El va fi planul diagonal $AA'CC'$, deoarece $O'O \perp (ABCD)$, punctele $O'$ $O$, $T$ aparţin planului diagonal $AA'CC'$

Planul $\delta$, planul $TO'M$ şi planul orizontal $ABCD$ au un punct comun $R$, care se obţine prelungind în planul $\delta$ — dreapta $TO'$ pînă la intersecţia ei cu dreapta $AC$. (Vezi fig. VIII.G.55a.) Punctele $R$ şi $M$ aparţin planelor $TO'M$ şi orizontal $ABCD$. Dreapta $RM$ intersectează în planul $ABCD$, dreapta $AB$ într-un punct $S$. Pe faţa $ABCD$, segmentul $SM$ reprezintă o latură a poligonului de secţiune dintre $TO'M$ şi faţa $ABCD$. A doua latură a poligonului de secţiune este $ST$, deoarece punctele $S$ şi $T$ aparţin planului $TO'M$, cît şi planului vertical $AA'BB'$

Următoarea latură a poligonului de secţiune, o obţinem folosind dreapta $O'M$ conţinută în planul $TO'M$, cît şi planul auxiliar proiectat. Prelungim în planul $\gamma$ — dreapta $O'M$ pînă la intersecţia ei cu planul vertical $AA'DD'$ — în punctul $V$. Unind punctele $V$ şi $T$ se obţine dreapta de intersecţie dintre $TOM$ şi $(AA'DD')$. În planul $AA'DD'$ dreapta $TV$ intersectează dreapta $A'D'$ în punctul $X$. Segmentul $TX$ este o altă latură a poligonului de secţiune.

Următoarea latură a poligonului de secţiune dintre $TOM$ şi planul $A'B'C'D'$ se obţine ducînd din punctul $X$ — în planul $A'B'C'D'$ — o paralelă la $SM$ (conform teoremei două plane paralele, sînt intersectate de un plan, după două drepte paralele). În urma calculelor ce se vor efectua, se va constata că această paralelă va intersecta întîi dreapta $B'C'$ şi apoi dreapta $D'C'$. Notăm acest punct $Y$. Punctele $Y$ şi $M$ fiind în planul vertical $BB'C'C$ determină ultima latură a poligonului de secţiune dintre $TOM$ şi planul $BB'CC'$. În concluzie, poligonul de secţiune este un pentagon $MSTXY$.

Observaţie : intersectînd cu un plan de secţiune feţele unui cub, se obţine un poligon de secţiune cu cel mult şase laturi.

b) Urmează calculul lungimilor laturilor pentagonului $MSTXY$. Notăm $AB = a$.

1. Calculul lungimii segmentului $SM$. În dreptunghiul $AA'CC'$ (Vezi fig. VIII.G.55.b.) $A'C' = a\sqrt{2}$; $A'O' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\triangle TA'O' \equiv \triangle TAR$ (dreptunghice, $TA' \equiv TA$ — ipoteză şi $\widehat{T_1} \equiv \widehat{T_2}) \Rightarrow AR = A'O' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Putem calcula segmentul $SM$ în pătratul $ABCD$. (Vezi fig. VIII.G.55c.) $RA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (demonstrat). Deoarece $BM \equiv MC$ (ipoteză) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $OM$, linie mijlocie în $\triangle CAB \Rightarrow OM = \frac{a}{2}$.

În $\triangle RMO$, $SA$ linie mijlocie deoarece $AS \parallel OM$ şi $RA = AO =$
$= \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (demonstrat) $\Rightarrow AS = \frac{a}{4} \Rightarrow SB = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$.

În $\triangle$ dreptunghic $SBM$,

$$SM^2 = MB^2 + SB^2\ ;\ SM^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{16}\ ;\ SM^2 = \frac{13a^2}{16}\ ;\ SM = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

2. Calculul lungimii segmentului $ST$. În pătratul $AA'BB'$ şi în triunghiul dreptunghic $TAS$ (Vezi fig. VIII.G.55d.) $TS^2 = TA^2 + AS^2$.

$$TS^2 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}}\ ;\ TS = \frac{a\sqrt{5}}{4}\left((TA = TA' = \frac{a}{2} \text{ ipoteză}).\right)$$

3. Calculul lungimii segmentului $XT$. În planul pătratului $MNPQ$, prelungim $QP$ şi notăm $V$ intersecţia $MO' \cap QP$. (Vezi fig. VIII.G.55e.) $\triangle O'NM \equiv \triangle O'PV$ (dreptunghice — cazul C.U.) $\Rightarrow VP = MN = a$.

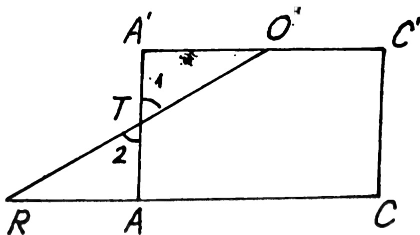


Fig. VIII.G.55.b.

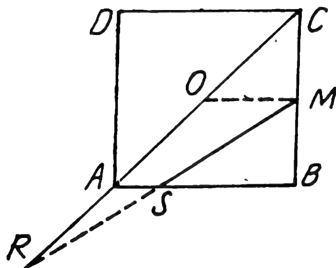


Fig. VIII.G.55.c.

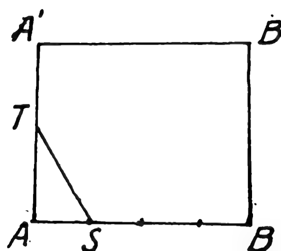


Fig. VIII.G.55.d.

Putem calcula segmentul $XT$. În pătratul $AA'DD'$, prelungim $QP$ cu segmentul $PV = a$. (Vezi fig. VIII.G.55f.) $\triangle XPV \sim \triangle XA'T$ și raportul de asemănare $\frac{A'T}{VP} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow A'X = \frac{XP}{2} \Rightarrow A'X = \frac{a}{6}$

În $\triangle$ dreptunghic $TA'X$,

$TX^2 = A'T^2 + A'X^2$ ; $TX^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{36}$ (ipoteza $AT \equiv TA' = a$) $\Rightarrow TX = \frac{a\sqrt{10}}{6}$

4. Calculul segmentului $XY$. În planul pătratului $A'B'C'D'$ (Vezi fig. VIII.G.55g.) procedăm astfel :

Notăm cu $S'$ și $M'$ proiecțiile ortogonale ale punctelor $S$ și $M$ pe laturile $A'B'$ și $B'C'$. Ducem $XY \parallel S'M'$ (conform teoremei două plane paralele sînt intersectate de un al treilea plan după drepte paralele). Împărțim latura $A'B'$ în patru părți congruente $\Rightarrow$ paralelele la latura

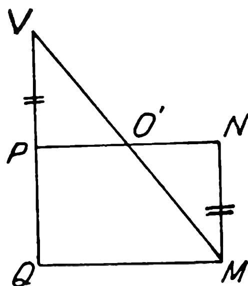


*Fig. VIII.G.55.e.*

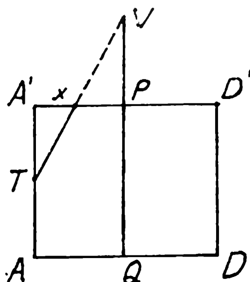


*Fig. VIII.G.55.f.*

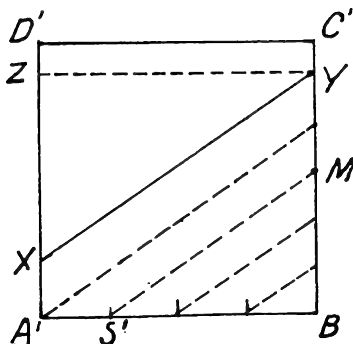


*Fig. VIII.G.55.g.*

$S'M'$, duse prin $A'$ și celelalte două puncte de diviziune sînt paralele echidistante și determină pe latura $B'C'$ segmente congruente (patru segmente congruente). Cum $B'M' = \frac{a}{2}$ (ipoteză) rezultă că unul din cele trei segmente congruente măsoară $\frac{a}{6}$. Cum și $XY$ este o paralelă echidistantă cu cele precedente urmează ca $C'Y = \frac{a}{6}$. Încadrăm segmentul $XY$ într-un $\triangle$ dreptunghic ducînd $YZ \parallel C'D' \Rightarrow YZ = a$; $XZ = \frac{2a}{3}$ În $\triangle$ dreptunghic $XZY$ aplică teorema lui Pitagora :

$$XY = \sqrt{a^2 + \frac{4a^2}{9}} \Rightarrow XY = \frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

Calculul segmentelor $MY$, (în planul pătratului $BB'CC'$). (Vezi fig. VIII.G.55.h.)

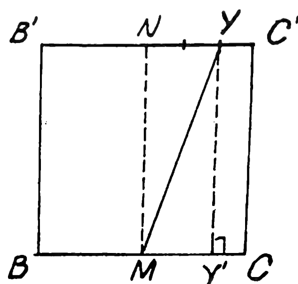



*Fig. VIII.G.55.h.*

Ducem $YY' \parallel CC' \Rightarrow$ în triunghiul dreptunghic $YY'M$, $YY' = a$; $MY' = \frac{a}{3}$(demonstrat) $\Rightarrow MY = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$.

6. Calculul perimetrului pentagonului de secțiune.

$$MS + ST + TX + XY + YM = \frac{a\sqrt{3}}{4} + \frac{a\sqrt{5}}{4} + \frac{a\sqrt{10}}{6} + \frac{a\sqrt{13}}{3} + \frac{a\sqrt{10}}{3} =$$

$$= \frac{a}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{5} + 2\sqrt{10})\cdot$$

**VIII.G.56.** Construim paralelipipedul dreptunghic $AFEDA'PE'D'$ (Vezi fig. VII.G.56.)

a) În triunghiul dreptunghic $VDC$ (ipoteză) $CV = a\sqrt{2}$. (1)

În triunghiul dreptunghic $PFC$ (ipoteză) $PC = a\sqrt{6}$ ($PF = 2a$ și $FC = a\sqrt{2}$, Pitagora). Ducem în planul determinat de dreptele $DV$ și $FP$

(ipoteză : $PF \| VD$, ambele perpendiculare pe $ABCD$). $VS \| DF \Rightarrow PSV$ triunghi dreptunghic şi $PS = a$ ; $VS = DF = a\sqrt{5}$. (în triunghiul dreptunghic $DAF$, $AD = a$ ; $AF = 2a$ — ipoteză), şi conform teoremei lui Pitagora $VP^2 = a^2 + 5a^2 = 6a^2 \Rightarrow VP = a\sqrt{6} \Rightarrow$ triunghiul $PCV$ isoscel : $PC = PV = a\sqrt{6}$.

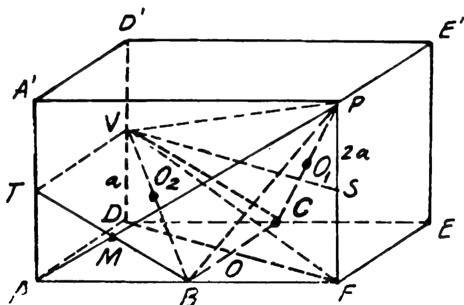



*Fig. VIII.G.56.*

b) Planul $BCV$ intersectează paralelipipedul construit (vezi indicaţia) după dreptunghiul $CBTV$ ($CB \| AD \| VT$ şi $CB \perp (AA'FP)$. În pătratul $AA'FP$ (construcţia indicată) punctele $B$ şi $T$ sînt mijloace de laturi $\Rightarrow BT \| FA'$ Ducem diagonala $PA \Rightarrow PA \perp FA'$ (diagonalele pătratului sînt perpendiculare) $\Rightarrow PA \perp BT$ (1). Deoarece $CB \perp (AA'FP)$ — (construcţie) $\Rightarrow PA \perp BC$. (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow PA \perp (BCVT)$ şi deci $PM$ este distanţa de la punctul $P$ la planul $VBC$ (unde $M$ este intersecţia dreptelor $PA$ şi $BT$). Cum $AM$ este mediană în triunghiul dreptunghic şi isoscel $TAB$ (diagonala $AP$ înjumătăţeşte $FA'$, dar şi orice paralelă la $FA'$) $\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow PM =$

$$= AP - AM = 2a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$$

Aşadar distanţa de la punctul $P$ la planul $CVT$ este $PM = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

c) Deoarece $CB \perp (AA'FP)$ (construcţia planului $AA'FP$) $\Rightarrow CB \perp$ $\perp PB \Rightarrow \triangle PBC$ este dreptunghic în punctul $B \Rightarrow$ centrul cercului circumscris $\triangle PBC$ se află la mijlocul ipotenuzei $PC$. Îl notăm $O_1$. Deoarece cercul circumscris triunghiului dretpunghic $CVB$ este şi al dreptunghiului $CVTB$, urmează că al doilea centru — notat $O_2$ se află la mijlocul ipotenuzei $VB$ adică este punctul de intersecţie al diagonalelor dreptun-

ghiului $CVTB$. $\Rightarrow$ în $\triangle PCT$, $(O_1O_2)$ este linie mijlocie $\Rightarrow O_1O_2 = \frac{PT}{2}$ Cum din construcţie $\triangle PA'T$ este dreptunghic, calculăm lungimea $PT = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$. Deci distanţa dintre centrele $O_1$ şi $O_2$ este $O_1O_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

**VIII.G.57.**

a) În triunghiurile $ABD$ şi $BCD$, (latura comună $BD$) ducem medialе $AG_1$ şi $CG_3$. Fie $E$ intersecţia acestora ($E \in BD$ şi $BE \equiv ED$, ipoteză). Deoarece $\frac{EG_1}{EA} = \frac{EG_3}{EC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ în $\triangle EAC$ $G_1G_3 \parallel AC$.

$\triangle EG_1G_3 \sim \triangle EAC$, avînd $\widehat{E}$ comun şi laturile care formează acest unghi proporţionale). Apoi, în $\triangle AEF$ ($F \in CD$ şi $CF \equiv FD$; $\frac{AG_1}{AE} = \frac{AG_2}{AF} = \frac{2}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel EF$. Dar $EF \parallel BC$ ($EF$ linie mijlocie în $\triangle BDC$ — ipoteză) $\Rightarrow G_1G_2 \parallel BC$. Asemănător în $\triangle CHE$ $\frac{CG_2}{CH} = \frac{CG_3}{CE} = \frac{2}{3}$ ($H$ fiind mijlocul laturii $AD$) $\Rightarrow G_3G_2 \parallel EH$. Dar $EH \parallel AB$ linie mijlocie în $\triangle ABD$ — ipoteză) $\Rightarrow G_3G_2 \parallel AB$. $\Rightarrow$ Unghiurile $\triangle G_1G_2G_3$ sînt congruente cu ale triunghiului $ABC$ avînd laturile paralele). $\Rightarrow$ Natura $\triangle ABC$ este şi a $\triangle G_1G_2G_3$.

b) Din ipoteză $G_1$ coincide cu centrul cercului circumscris $\triangle ABD \Rightarrow G_1A \equiv G_1B \equiv G_1C \Rightarrow$ triunghiurile dreptunghice $CG_1A$, $CG_1B$ şi $CG_1D$ sînt congruente (cazul C.C.) $\Rightarrow CA \equiv CB \equiv CD$ iar punc-

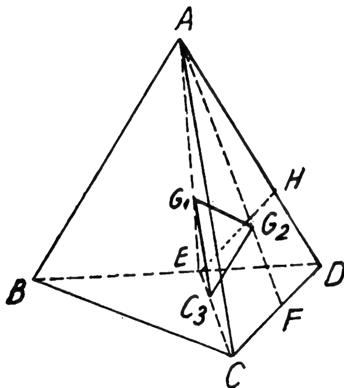



*Fig. VIII.G.57.*

tul $G_1$ fiind ortocentrul $\triangle ABD \Rightarrow AG_1 \perp BD$. În concluzie $BD \perp$ $\perp (ACG_1) \Rightarrow BD \perp AC$. Așadar în ipotezele punctului b), dreptele $AC$ și $BD$ sînt perpendiculare.

**VIII.G.58.** În figura VII.G.58., să notăm pentru simplificare planul $MNPQ = \alpha$. Din construcțiile făcute rezultă $CC' \perp \alpha$ și $DD' \perp \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow CC' \parallel DD'$. Planele $\alpha$ și $(ACD)$ au ca dreaptă de intersecție, dreapta $PQ$. Cum $C' \in \alpha$ și $D' \in \alpha$ (construcție), dreapta $C'D'$ este conținută în

*Fig. VIII.G.58.*

planul $\alpha$. Aceasta va intersecta dreapta $PQ$ ($PQ \subset \alpha$) într-un punct care se va găsi în planele $\alpha$ și $(ABC)$. Acest punct este tocmai punctul $P$. În aceste condiții, punctele $C'$, $P$, $D'$ sînt colineare $\Rightarrow$ unghiurile $CPC'$ și $DPD'$ sînt opuse la vîrf, deci congruente $\widehat{CPC'} \equiv \widehat{DPD'}$ (1).

Din construcție, triunghiurile $CC'P$ și $DD'P$ sînt dreptunghice iar $CC' \parallel DD'$ (demonstrat) $\Rightarrow$ cele două triunghiuri se găsesc în planul determinat de dreptele paralele $CC'$ și $DD'$ În ipoteză $CC' \equiv DD'$ și $\widehat{CPC'} \equiv \widehat{DPD'}$ (conform 1) $\Rightarrow \triangle CC'P \equiv \triangle DD'P$ (cazul I.U.) $\Rightarrow CP \equiv$ $\equiv PD$. (2) $\Rightarrow$ planul $MNPQ = \alpha$ și urmează următoarea construcție a planului.

Fixăm $P \in CD$ astfel încît $CP \equiv PD$. În $\triangle CAD$ ducem $PQ \parallel AC$ ($DQ \equiv QA$, $PQ$ fiind linie mijlocie în $\triangle CAD$ — reciprocă).

În $\triangle ABD$ ducem $QM \parallel BD$ ($AM \equiv MB$, $MQ$ linie mijlocie în $\triangle ABD$).

În $\triangle ABC$ ducem $MN \parallel AC$ ($BN \equiv NG$, $MN$ fiind linie mijlocie în $\triangle ABC$). Unim $N$ cu $P$ (evident $NP \|$ $BD$) căci $N$ și $P$ sînt mijloace de laturi — construcție). Punctele $M$, $N$, $P$, $Q$ sînt coplanare deoarece, de exemplu, $MN \parallel AC \parallel QP$ (construcție). În același timp planul $MNPQ$ este egal depărtat de punctele $A$, $B$, $C$, $D$, căci — de exemplu — ducînd $CC' \perp MNPQ$ *și* $DD' \perp MNPQ$, triunghiurile dreptunghice $\widehat{CC'P}$ și $\widehat{DD'P}$ sînt congruente deoarece $CP \equiv PD$ și $\widehat{C'PC} \equiv \widehat{P'PD}$ — opuse la vîrf. Așadar $MNPQ = \alpha$.

**VIII.G.59.** Punctele $A$, $B$, $C$ determină un plan $\alpha$. Punctele $A'$, $B'$, $C'$ determină alt plan $\beta$. Planele $\alpha$ și $\beta$ sînt concurente deoarece : în planul determinat de dreptele $a$ și $b$ prelungind segmentele neparalele $AB$ și $A'B'$ obținem un punct de intersecție $M$. Cum $M \in AB \Longrightarrow M \in \alpha$. Dar $M \in A'B' \Longrightarrow M \in \beta \Longrightarrow$ planele $\alpha$ și $\beta$ avînd un punct comun $M$, au o dreaptă comună pe care o notăm cu ($d$). Evident $M \in d$. (Vezi fig. VIII.G.59.)

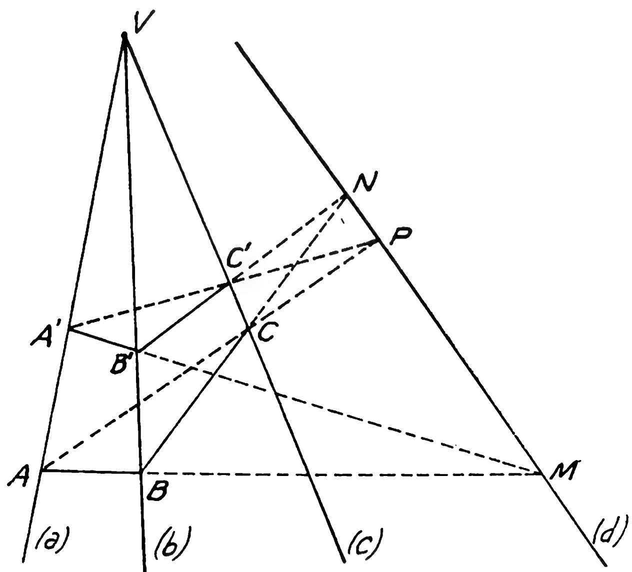



*Fig. VIII.G.59.*

Repetăm raționamentul : în planul determinat de dreptele $b$ și $c$, prelungind segmentele neparalele $BC$ și $B'C'$ se obține punctul lor de intersecție pe care-l notăm cu $N$ etc... $\Longrightarrow N \in d$. Raționînd asemănător, deducem că segmentele neparalele $CA$ și $C'A'$ au și ele un punct de intersecție $P \Longrightarrow P \in d$.

În concluzie, punctele $M$, $N$, $P$ sînt coliniare și anume aparțin dreptei de intersecție $d$, a planelor $\alpha$ și $\beta$ determinate de punctele $A$, $B$, $C$ și respectiv $A'$, $B'$, $C'$.

Observație : 1. Să presupunem că triunghiurile $ABC$ și $A'B'C'$ sînt coplanare. Se numesc triunghiuri „omologice" acele triunghiuri ale căror vîrfuri sînt, două cîte două pe trei drepte concurente — punctul de concurență se numește „centrul de omologie". Folosind noțiunea de „triunghiuri omologice" teorema lui Desargues se enunță astfel

Dacă triunghiurile $ABC$ şi $A'B'C'$ sînt triunghiuri omologice, atunci punctele $M = AB \cap A'B'$, $N = BC \cap B'C'$ şi $P = AC \cap A'C'$ sînt colineare şi reciproce.

2. Demonstraţia teoremei lui Desargues în plan este „spectaculoasă" dacă privim figura VIII.G.59, drept ilustrarea unei „figuri plane", şi o „gîndim" apoi în „spaţiu".

**VIII.G.60.** În triunghiul $AED$, deoarece $G_1 \in ED$ şi $G_4 \in AE$ $\Rightarrow$ dreptele $AG_1$ şi $DG_4$ sînt concurente. Notăm punctul de concurenţă $G$ (Vezi fig. VIII.G.60.) În $\triangle AED$ deoarece $\frac{EG_1}{ED} = \frac{EG_4}{EA} = \frac{1}{3}$ (proprietatea centrului de greutate al unui triunghi) $\Rightarrow$ $G_1G_4 \parallel AD$ $\Rightarrow$ $\triangle GG_1G_4 \sim \triangle GAD$ (unghiurile din $G$ opuse la vîrf, unghiurile $\widehat{G_4G_1G} = \widehat{DAG}$ alterne interne) $\Rightarrow \frac{GG_1}{GA} = \frac{1}{3}$ (acelaşi raport de asemănare). Deci punctul $G$ se află pe dreptele $AG_1$ şi $DG_4$ situat la o pătrime faţă de feţele opuse şi la trei pătrimi faţă de vîrfurile opuse feţelor respective. (1)

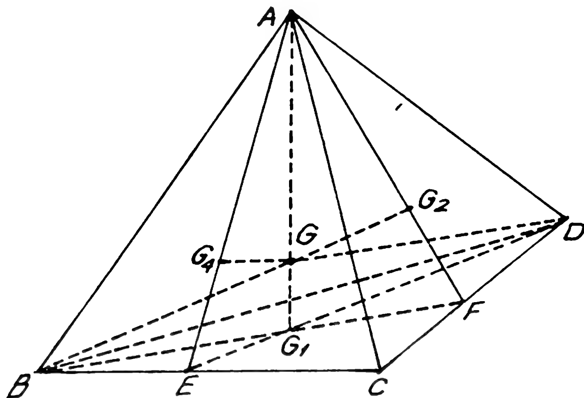



*Fig. VIII.G.60.*

În $\triangle ACD$ ducem mediana $AF$. În triunghiul $ABF$ există dreapta $AG_1$ deoarece mediana $BF$ a triunghiului $BCD$ trece prin $G_1$. Tot în $\triangle ABF$ ducem $BG_2$ şi notăm intersecţia dreptelor $AG_1$ şi $BG_2$ de exemplu $P$. Repetînd raţionamentele făcute la punctul (1) $\Rightarrow \frac{PG_1}{PA} = \frac{1}{3}$. (2) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $P = G$ (3). (Punctul care împarte — interior — un segment într-un raport dat, este unic).

Aşadar, dreptele care unesc punctele $A$, $B$ şi $D$ cu centrele de greutate ale feţelor opuse $G_1$, $G_2$ şi respectiv $G_4$ sînt concurente în punctul $G$.

Asemănător, „prindem“ în această concurenţă şi dreaptă $CG_3$. În concluzie dreptele $AG_1$, $BG_2$, $CG_3$ şi $DG_4$ sînt concurente într-un punct, notat de exemplu $G$, iar acest punct se găseşte pe dreptele de mai sus, situat la $\frac{1}{4}$ de feţele opuse punctelor $A, B, C, D$ şi la $\frac{3}{4}$ faţă de vîrfurile $A, B, C, D$. Punctul $G$ se numeşte centrul de greutate al tetraedrului.

*Caz particular.* Dacă $ABCD$ este un tetraedru regulat, atunci punctele $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ coincid cu ortocentrele feţelor şi teorema lui Commandino se enunţă într-un tetraedru regulat, înălţimile tetraedrului sînt concurente într-un punct $G$, care se află la aceeaşi depărtare faţă de feţele tetraedrului şi anume la o depărtare egală cu $\frac{1}{4}$ din lungimea înălţimii tetraedrului. Evident punctul $G$ este centrul de greutate al tetraedrului.

**VIII.G.61.** a) În figura VIII.G.61, feţele cubului $AVBB'$ şi $AVDA'$ fiind pătrate, punctele $A_1$ şi $A_3$ sînt centrele lor. Poligonul de secţiune se obţine determinînd intersecţiile dintre $(AA_1A_3)$ şi feţele cubului. El este triunghiul echilateral $AB'A'$ (laturile fiind diagonalele feţelor cubului, deoarece : $AA_3 \subset (AVA'D)$ ; $AA_1 \subset (AVB'B)$ iar $A'B' \cap$ **$(A'VB'C')$ iar** $AA' \equiv AB' \equiv A'B'$ (Vezi fig. VIII.G.61.).

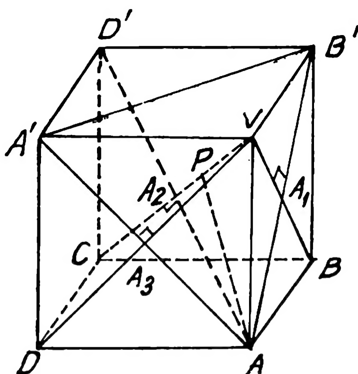



*Fig. VIII.G.61.*

Cum $VA \equiv VB' \equiv VA'$ (ipoteză) rezultă că punctul $V$ se proiectează pe planul $AA'B'$ într-un punct $P$ egal depărtat de $A$, $A'$, $B'$, deci în centrul lui de greutate. La fel gîndim şi despre proiecţia punctului $C$ pe planul $AA'B'$. (Proprietatea punctului de concurenţă a mai multor oblice congruente, care se proiectează pe planul determinat de picioarele oblicelor.)

Aşadar, perpendicularele duse din punctele $V$ şi $C$ pe planul $(AA'B')$ au acelaşi picior şi anume punctul $P$. Rezultă că $CV \perp (AA_1A_3)$ şi deci $CV \perp AP$. Cum $AA_2 \perp CV$ din ipoteză, ar rezulta că din punctul $A$ şi

în planul $AA_1A_3$, putem duce două perpendiculare pe dreapta $CV$ şi anume $AP$ şi $AA_2$ — absurd. Urmează că $P = A_2$ şi deci punctele $A$, $A_1$, $A_2$, $A_3$ sînt coplanare şi apoi concluzia că $CV \perp (AA_1A_2A_3)$.

b) Cum punctul $A_2$ reprezintă în triunghiul echilateral $AA'B'$ şi intersecţia înălţimilor $B'A_3$ şi $A'A_1$ rezultă că în patrulaterul $A_2A_3AA_1$ unghiurile din $A_3$ şi $A_1$ măsoară 90°, deci patrulaterul $AA_1A_2A_3$ este inscriptibil. Problema rămîne adevărată dacă înlocuim cubul $ABCDVA'B'C'$ cu un paralelipiped dreptunghic ?

**VIII.G.62.** a) Notînd dimensiunile paralelipedului $a$, $b$, $c$ şi exprimînd pătratul diagonalei paralelipipedului cît şi aria lui totală, avem de demonstrat $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Înmulţim membrii inecuaţiei cu 2 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geqslant 2ab + 2bc + 2ca$ grupăm convenabil $(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) \geqslant 0$. Restrîngem respectivele dezvoltări: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0$. Inegalitatea este evidentă. Dacă $a = b = c$ paralelipipedul dreptunghic este cub şi deci într-un cub, numărul care arată pătratul diagonalei este egal cu numărul care arată jumătatea ariei lui laterale.

b) Fiecărei diagonale a poligonului de bază îi corespund în planul respectiv, două diagonale ale prismei (conform celor arătate la „indicaţii").

Cum prisma are 130 de diagonale, rezultă că poligonul convex de la baza prismei are 65 de diagonale. Formula care dă numărul diagonalelor unui poligon convex este $\frac{n(n-3)}{2}$ unde „$n$" reprezintă numărul laturilor poligonului convex.

Rezultă ecuaţia de gradul al 2-lea : $\frac{n(n-3)}{2} = 65$ care rezolvată în $\mathbf{N}^*$ are o singură soluţie $n = 13$. Deci poligonul convex în cauză are 13 laturi.

**VIII.G.63.** Să notăm cu $S_1, S_2, \ldots, S_8$ sumele numerele corespunzătoare tripletelor de muchii care ajung respectiv în vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_8$. Fiecare dintre sumele $S_1 \ldots S_8$ provine din adunarea a trei numere, luate o singură dată din mulţimea numerelor naturale de la 1 la 22. Cum fiecare dintre numerele de la 1 la 12 ajunge în două vîrfuri dintre vîrfurile $A_1, A_2, \ldots, A_8$, înseamnă că în suma $S_1 + S_2 + \ldots + S_8$, fiecare dintre numerele de la 1 la 12 intră de două ori, şi alte numere în afara celor de la 1 la 12, nu vor exista. Deci, $S_1 + S_2 + \ldots + S_8 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 12) = 2 \cdot 13 \cdot 6 = 12 \cdot 13 = 156$. Spre a se putea realiza numerotarea cerută în textul problemei, ar trebui ca $S_1 = S_2 = \ldots = S_8$, deci $156 = 8 \cdot S_1$ cu $S_1 \in \mathbf{N}^*$. Aşadar, suma $S_1 + \ldots + S_8$ ar trebui să fie un multiplu de 8. În cazul de faţă 156 nefiind multiplu de 8, numerotarea muchiilor cerute de problemă, nu este posibilă.

**VIII.G.64.** a) Mai întîi să arătăm că există tetraedre cu cele patru feţe triunghiuri dreptunghice. Construim un triunghi dreptunghic $ABC$, $m(A) = 90°$. Pe planul $ABC$ şi de exemplu în punctul $B$ ducem o perpendiculară, pe care fixăm un punct oarecare $D$. Punctele $A$, $B$, $C$, $D$ determină un tetraedru în care feţele sînt triunghiuri dreptunghice pentru că : (Vezi fig. VIII.G.64.a.)

$BA \perp AC$ din ipoteză ;

$DB \perp BA$ din construcţia făcută ;

$DB \perp BC$ din aceeaşi construcţie ;

$DA \perp AC$ conform teoremei celor trei perpendiculare.

Deci există astfel de tetraedre. Să demonstrăm că singurele tetraedre cu toate feţele triunghiuri dreptunghice sînt numai cele descrise la punctul a).

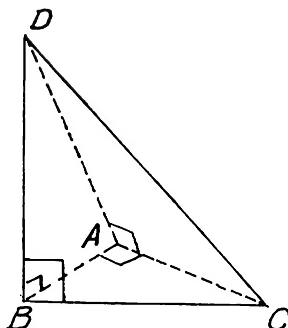



Fig. VIII.G.64.a.

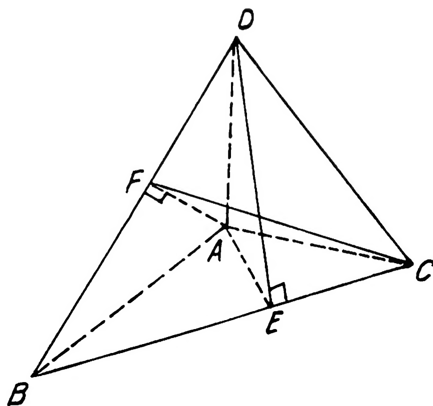


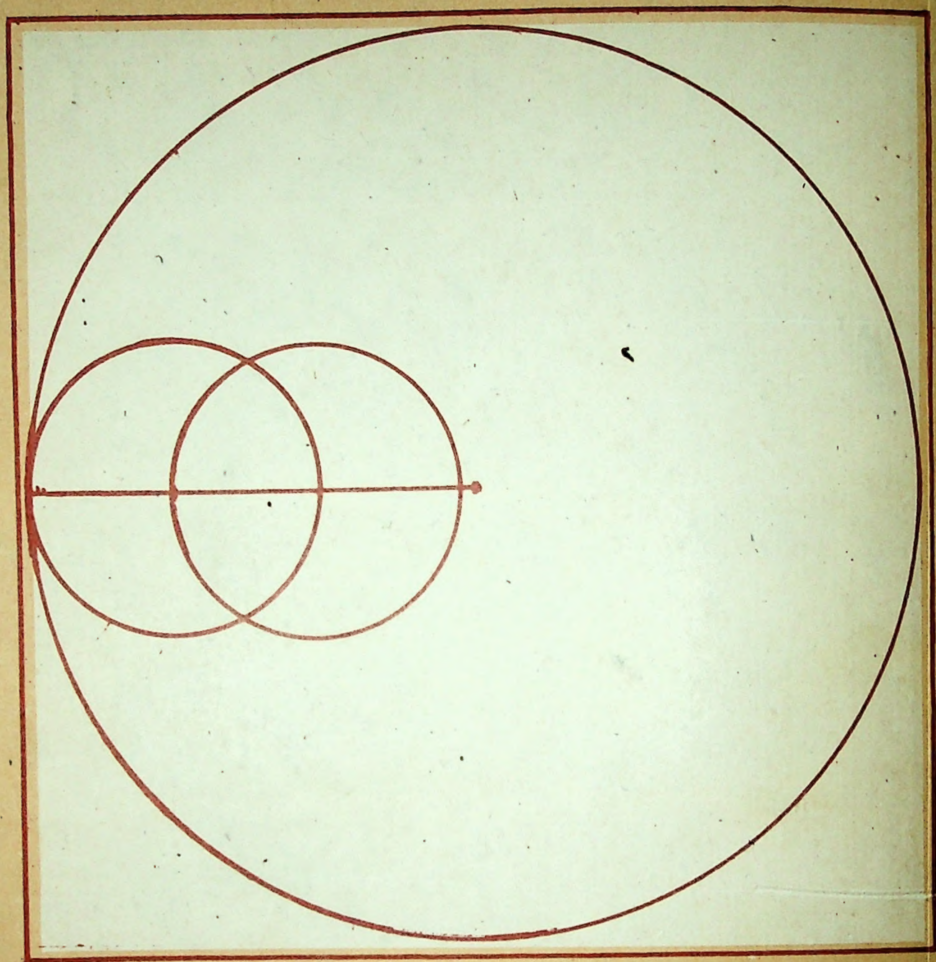

Fig. VIII.G.64.b.

Să presupunem că, de exemplu, vîrful $A$ al unui tetraedru cu toate feţele triunghiuri dreptunghice, este un triedru tridreptunghic. Vom arăta că această situaţie este imposibilă. (Vezi fig. VIII.G.64.b.)

Construim $AE \perp BC$ $(E \in BC)$. Triunghiul $BAC$ fiind dreptunghic în $A$ (ipoteză) $\Rightarrow$ piciorul perpendicularei $AE$ se află între $B$ şi $C$. Conform teoremei celor trei perpendiculare $DE \perp BC$ şi deci $m(C) < 90°$, dar şi $m(B) < 90°$. În concluzie tetraedrul $ABCD$ are feţele $BAC$, $CAD$ şi $DAB$ triunghiuri dreptunghice, iar faţa $BCD$ un triunghi ascuţitunghic.

b) Acum să presupunem că tetraedrul are cele patru feţe triunghiuri dreptunghice, dar şi congruente. (Vezi fig. VIII.G.65.a.)

De exemplu, din $\triangle BAC \equiv \triangle DBC$ rezultă $BC \equiv DC$, aşadar în triunghiul dreptunghic $DBC$, $m(D) = 90°$, cateta $BC$ este congruentă cu ipotenuza $DC$. Rezultatul este absurd, şi în concluzie, nu există tetraedru cu feţele triunghiuri dreptunghice congruente. La fel se ajunge la contradicţie şi în celelalte cazuri .



Lei 40